Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Łukasz Kidziński
Nr albumu: 234151

Kompakt Banacha-Mazura

Praca licencjacka
na kierunku MATEMATYKA

Praca wykonana pod kierunkiem
dr hab. Rafała Latały
Instytut Matematyki

Wrzesień 2008

Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora (autorów) pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data Podpis autora (autorów) pracy

Streszczenie

Wypukłym ciałem środkowo-symetrycznym nazywamy zwarty zbiór wypukły $K \subset \mathbb{R}^n$ o niepustym wnętrzu taki, że $K = -K$. Na zbiorze takich ciał wprowadzamy odległość $d_{BM}(K,L) = \inf \left\{ \frac{b}{a} : aK \subset TL \subset bK, \text{ dla pewnego } T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), a, b \in \mathbb{R}_+ \right\}$ zwaną odległością Banacha-Mazura. Funkcja $\rho(K,L) = \ln d_{BM}(K,L)$ jest metryką po utożsamieniu ciał dla których $d_{BM}(K,L) = 1$.
Zbiór klas abstrakcji tego utożsamienia wraz z opisaną powyżej metryką tworzy przestrzeń zwartą $(\mathcal{C}_n, \rho)$ zwaną kompaktem Banacha-Mazura. W pracy udowodnimy podstawowe własności tej przestrzeni. Dzięki twierdzeniu Johna wsakażemy ograniczenie górne odległości d_{BM}, a twierdzenie Gluskina pozwoli nam wskazać dolne ograniczenie na średnicę $\mathcal{C}_n$.

Słowa kluczowe

odległość Banacha-Mazura, twierdzenie Johna, twierdzenie Gluskina, kompakt Banacha-Mazura

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

11.1 Matematyka

Klasyfikacja tematyczna

Geometria wypukła i dyskretna → Wypukłość → Skończenie wymiarowe przestrzenie Banacha (AMS: 52A21)
Analiza funkcjonalna → Unormowane przestrzenie liniowe i przestrzenie Banacha → Geometria i struktura unormowanych przestrzeni liniowych (AMS: 46B20)

Tytuł pracy w języku angielskim

Banach-Mazur compactum

Spis treści

Wprowadzenie

W niniejszej pracy rozpatrzymy rodzinę $\mathcal{C}_n$ składającą się ze środkowo-symetrycznych ciał wypukłych w $\mathbb{R}^n$ (tj. zwartych i wypukłych podzbiorów $K \subset \mathbb{R}^n$ o niepustym wnętrzu takich, że $K = -K$). Utożsamimy ciała liniowo-izomorficzne, a następnie wprowadzimy odległość mierzącą jak bardzo należy „zdeformować” jedno ciało by otrzymać drugie. Zdefiniujemy ją jako

$$d_{BM}(K, L) = \inf \left\{ \frac{b}{a} : aK \subset TL \subset bK, \text{ dla pewnego } T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), a, b \in \mathbb{R}_+ \right\}.$$

Pokażemy podstawowe własności opisanej powyżej przestrzeni $(\mathcal{C}_n, d_{BM}(K, L))$ zwanej dalej kompaktem Banacha-Mazura.

Każde ciało K indukuję normę $\|x\|_K := \inf\{t : x \in tK\}$ i jest kulą jednostkową w tej normie, a zatem wzajemnie jednoznacznie określa ono przestrzeń $X_K = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_K)$. Odległość Banacha-Mazura dostarcza nam zatem kolejnego sposobu klasyfikacji n-wymiarowych przestrzeni liniowych.

W pierwszym rozdziale pracy skupimy się na podstawowych własnościach przestrzeni $(\mathcal{C}_n, d_{BM}(K, L))$. Pokażemy, że odległość Banacha-Mazura spełnia multiplikatywną nierówność trójkąta, a zatem jej logarytm okaże się normą. Na zakończenie udowodnimy, że kompakt Banacha-Mazura jest przestrzenią zwartą.
W kolejnych dwóch rozdziałach zaprezentowane zostaną bardziej szczegółowe wyniki badań. Udowodnimy twierdzenie Fritza Johna, niemieckiego matematyka, który w 1948 pokazał, iż odległość pomiędzy dwoma dowolnymi ciałami jest mniejsza niż n.
W ostatnim rozdziale pokażemy twierdzenie Efima D. Gluskina, które pozwala asymptotycznie oszacować z dołu średnicę $\mathcal{C}_n$. Udowodnimy, że dla każdego n istnieją ciała wypukłe $K, L \subset \mathbb{R}^n$, takie, że $d_{BM}(K, L) \geqslant cn$ gdzie c jest uniwersalną stałą niezależną od wymiaru. W dowodzie wykorzystamy metody probabilistyczne - losując ciała specjalnej klasy wykażemy, że zdarzenie $d_{BM}(K, L) \geqslant cn$ ma dodatnie prawdopodobieństwo.

Rozdział 1

Odległość Banacha-Mazura

Definicja 1. *Zbiór $K \in \mathbb{R}^n$ nazywamy ciałem wypukłym jeśli K jest zwarty, wypukły oraz Int$K \neq \emptyset$. Mówimy, że K jest środkowo symetryczny jeśli $x \in K \Leftrightarrow -x \in K$. Rodzinę środkowo-symetrycznych ciał wypukłych w zbiorze $\mathbb{R}^n$ będziemy oznaczać symbolem $\mathcal{B}_n$.*

Definicja 2. *Mówimy, że ciała K i $L \in \mathcal{B}_n$ są izomorficzne, gdy istnieje izomorfizm liniowy T taki, że $TK = L$. Piszemy wtedy $K \sim L$.*

Fakt 3. *Relacja $\sim$ jest relacją równoważności.*

Dowód.
1. $K = I_n K$, gdzie I_n oznacza odwzorowanie identycznościowe na $\mathbb{R}^n$.
2. $TK = L \Leftrightarrow K = T^{-1}L$.
3. $T, S \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $TK = L$ oraz $SL = M$. Wtedy oczywiście $(ST)K = M$, więc ST jest szukanym izomorfizmem.

$\square$

Definicja 4. *Odległością Banacha-Mazura, pomiędzy dwoma ciałami nazywamy funkcję d_{BM} : $\mathcal{B}_n \times \mathcal{B}_n \to [1, +\infty)$ określoną wzorem*

$$d_{BM}(K, L) = \inf \left\{ \frac{b}{a} : aK \subset TL \subset bK, \textit{ dla pewnego } T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), a, b \in \mathbb{R}_+ \right\}.$$

Uwaga 5. *Zachodzi $d_{BM}(K, L) \geqslant 1$.*

Dowód. Przypuśćmy, że $\exists_{K,L}\ d_{BM}(K, L) < 1$, wtedy z definicji d_{BM} zachodzi

$$aK \subset bK \qquad \text{dla pewnych } a, b \text{ takich, że } \frac{b}{a} < 1,$$

zatem

$$K \subset \left(\frac{b}{a}\right) K \subset \left(\frac{b}{a}\right)^2 K \subset ...$$

a ponieważ K jest ograniczone to

$$K \subset \lim \left(\frac{b}{a}\right)^n K = \{0\},$$

czyli Int$K = \emptyset$ i otrzymujemy sprzeczność z $K \in \mathcal{B}_n$. Zatem $d_{BM} \geqslant 1$.

$\square$

Fakt 6. *Dla dowolnych ciał $K, L \in \mathcal{B}_n$ zachodzi $d_{BM}(K,L) = 1 \iff K \sim L$.*

Dowód. Jeśli $K \sim L$, to dla pewnego izomorfizmu $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ zachodzi

$$L \subset TK \subset L,$$

czyli $d_{BM}(K,L) \leqslant 1$. Mamy jednak $d_{BM} \geqslant 1$, więc $d_{BM}(K,L) = 1$.
Pozostało pokazać $d_{BM}(K,L) = 1 \Rightarrow K \sim L$.
Ponieważ $d_{BM}(K,L) = 1$, istnieje ciąg liczb $c_n \in [1,2]$, takich, że dla pewnych izomorfizmów $T_n \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$

$$K \subset T_n L \subset c_n K$$

oraz $\lim_{n\to\infty} c_n = 1$. Pokażemy, że ciąg T_n ma podciąg zbieżny.
Operatory $T_n \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ możemy utożsamić z macierzami $n \times n$. Oznaczmy te macierze przez $\tilde{T}_n$. Ciała K i L są ograniczone i mają niepuste wnętrza, więc dla pewnych $r, R > 0$ i dostatecznie dużych n zachodzi

$$\begin{array}{c} K \subset B_2(0,R) \\ L \supset B_2(0,r) \end{array} \Rightarrow \|\tilde{T}_n e_i\|_2 \leqslant c_n \frac{R}{r} \leqslant 2\frac{R}{r},$$

a w związku z tym wyrazy macierzy $\tilde{T}_n$ są ograniczone. Istnieje zatem podciąg zbieżny $\tilde{T}_{n_k}$, a graniczny operator $\tilde{T}$ spełnia nierówność

$$K \subset \tilde{T} L \subset K.$$

Zatem $K = \tilde{T}L$, co kończy dowód. □

W ogólności nie jest prawdą, że cały ciąg T_n ma granicę. Dla przykładu wystarczy wziąć przestrzeń $\mathbb{R}^2$, kwadrat o środku w punkcie $(0,0)$ i bokach równoległych do osi oraz operatory

$$T_{2n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; T_{2n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Fakt 7. *Dla dowolnych ciał $K, L \in \mathcal{B}_n$ zachodzi*

$$d_{BM}(K,L) = d_{BM}(L,K).$$

Dowód. Zauważmy, że dla wszystkich $a, b > 0$ i $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mamy

$$\begin{gathered} aK \subset TL \subset bK \Rightarrow \\ TL \subset \frac{b}{a} aK \subset \frac{b}{a} TL \Rightarrow \\ aL \subset abT^{-1}K \subset bL, \end{gathered}$$

czyli nierówność z definicji odległości d_{BM} jest spełniona dla operatora abT^{-1}, a w związku z tym zbiory po których bierzemy infimum są sobie równe. □

Zmierzamy do tego, by pokazać, że d_{BM} spełnia warunki podobne do tych z definicji metryki:

1. $d_{BM}(L,K) \geqslant 1$ oraz $d_{BM}(L,K) = 1 \Leftrightarrow K \sim L$
2. $d_{BM}(L,K) = d_{BM}(K,L)$

3. $d_{BM}(L,K) \leqslant d_{BM}(L,M)d_{BM}(M,K)$

Warunki te implikują, że $\rho(K,L) = \ln d_{BM}(K,L)$ będzie metryką po utożsamieniu ciał izomorficznych. Zanim to udowodnimy, pokażemy, że d_{BM} faktycznie spełnia warunek 3, zwany czasem multiplikatywną nierównością trójkąta.

Fakt 8. *Dla dowolnych ciał $K, L \in \mathcal{B}_n$ zachodzi*

$$d_{BM}(L,K) \leqslant d_{BM}(L,M)d_{BM}(M,K).$$

Dowód. Niech $\lambda_1 > d_{BM}(L,M)$ i $\lambda_2 > d_{BM}(M,K)$. Wówczas istnieją a_1, a_2, b_1, b_2 takie, że $\frac{a_1}{b_1} < \lambda_1$ i $\frac{a_2}{b_2} < \lambda_2$ oraz izomorfizmy S, T takie, że

$$a_1 M \subset TL \subset b_1 M \text{ oraz } a_2 K \subset SM \subset b_2 K.$$

Zachodzi wtedy

$$\begin{aligned} L &\subset b_1 T^{-1} M \subset b_1 b_2 T^{-1} S^{-1} K \\ &\subset \frac{b_1 b_2}{a_2} T^{-1} S^{-1} S M \\ &\subset \frac{b_1 b_2}{a_1 a_2} L, \end{aligned}$$

czyli

$$L \subset b_1 b_2 (ST)^{-1} K \subset \frac{b_1 b_2}{a_1 a_2} L.$$

Zatem izomorfizm $b_1 b_2 (ST)^{-1}$ i stałe $a = 1$, $b = \frac{b_1 b_2}{a_1 a_2}$, spełniają warunki z definicji d_{BM}, czyli $d_{BM}(L,K) \leqslant \frac{b_1 b_2}{a_1 a_2} < \lambda_1 \lambda_2$. □

Mamy już funkcję przypominającego metrykę oraz relację równoważności $\sim$, która dzieli rodzinę $\mathcal{B}_n$ na klasy abstrakcji w ten sposób, że $\dim(K,L) = 1 \Leftrightarrow K \sim L$. Pozostało udowodnić, że odległość pomiędzy różnymi elementami danych klas abstrakcji jest stała.

Fakt 9. *Dla dowolnych ciał $K_1 \sim K_2$ i $L_1 \sim L_2$ zachodzi*

$$d_{BM}(K_1, L_1) = d_{BM}(K_2, L_2).$$

Dowód. Skorzystamy dwukrotnie z udowodnionej wcześniej multiplikatywnej nierówności trójkąta i faktu, że odległość jest równa 1 dla ciał izomorficznych

$$\begin{aligned} d_{BM}(K_1, L_1) &\leqslant d_{BM}(K_1, L_2) d_{BM}(L_2, L_1) = d_{BM}(K_1, L_2) \\ &\leqslant d_{BM}(K_1, K_2) d_{BM}(K_2, L_2) = d_{BM}(K_2, L_2). \end{aligned}$$

Analogicznie otrzymujemy

$$d_{BM}(K_2, L_2) \leqslant d_{BM}(K_1, L_1),$$

co kończy dowód. □

Powyższe pięć faktów pozwala zdefiniować przestrzeń metryczną.

Definicja 10. *Niech $\mathcal{B}_n$ będzie rodziną ciał symetrycznych, a $\sim$ relacją równoważności względem izomorfizmu. Rodzinę klas abstrakcji relacji $\sim$ w zbiorze $\mathcal{B}_n$ nazywamy kompaktem Banacha-Mazura i oznaczamy $\mathcal{C}_n$.*

Twierdzenie 11. *Rodzina $\mathcal{C}_n$ wraz z metryką $\rho([K],[L]) = \ln d_{BM}(K,L)$, gdzie $K, L \in \mathcal{C}_n$, a $[K]$ oznacza klasę abstrakcji elementu K, jest przestrzenią metryczną.*

Dowód. Własności metryki bezpośrednio wynikają z faktów udowodnionych powyżej. □

Zanim przejdziemy do własności kompaktu Banacha-Mazura, wprowadzimy równoważną definicję metryki. Zdefiniujmy najpierw kulę jednostkową.

Definicja 12. *Kulą jednostkową w przestrzeni $(X, \|\cdot\|_X)$ nazywamy zbiór*

$$B_X = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}.$$

W szczególności kulę w przestrzeni $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ oznaczamy

$$B_p^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{k=1}^{n} |x|^p \leqslant 1\}.$$

Przy czym dla uproszczenia notacji indeks n będziemy czasem pomijać.

Zauważmy, że dla dowolnego $K \in \mathcal{C}_n$, biorąc $\|x\|_K = \inf\{\varepsilon : x \in \varepsilon K\}$ otrzymujemy normę na $\mathbb{R}^n$. Łatwo pokazać, że dla dowolnej normy $\|\cdot\|$, kula jednostkowa w przestrzeni $(R^n, \|\cdot\|)$ jest ciałem wypukłym. W związku z tym d_{BM} zadaje również odległość pomiędzy przestrzeniami unormowanymi (po utożsamieniu przestrzeni których kule są izomorficzne). Pokażemy równoważną definicję metryki w której nie korzystamy bezpośrednio z pojęcia ciał wypukłych, a operujemy tylko na unormowanych przestrzeniach $\mathbb{R}^n$. Skorzystamy z następującego lematu

Lemat 13. *Niech $T : X \to Y$ będzie operatorem liniowym. Wówczas zachodzi*

$$\|T\|_{X\to Y} \leqslant \lambda \Longleftrightarrow TB_X \subset \lambda B_Y.$$

Dowód. Zacznijmy od implikacji w prawą stronę.
$\|Tx\| \leqslant \|T\|\|x\|$ zatem $x \in B_X \Rightarrow Tx \in \|T\|B_Y \subset \lambda B_Y$.
W celu udowodnienia drugiej implikacji zauważmy, że jeśli $x \in B_X$ to $Tx \in \lambda B_Y$, czyli $\|Tx\| \leqslant \lambda$. Zatem

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|Tx\| \leqslant \lambda.$$

□

Twierdzenie 14. *Niech $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ będą n-wymiarowymi unormowanymi przestrzeniami wektorowymi. Przez B_X i B_Y oznaczmy kule jednostkowe tych przestrzeni. Wtedy*

$$d_{BM}(B_X, B_Y) = \inf\left\{\|T\|\|T^{-1}\| : T \textit{izomorfizm } X \to Y\right\}.$$

Dowód. Niech:
$A = \left\{\frac{b}{a} : aB_Y \subset TB_X \subset bB_Y, \text{ dla pewnego } T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), a, b \in \mathbb{R}_+\right\}$
$B = \{\|T\|\|T^{-1}\| : T \in \mathrm{L}(X,Y)\}$.
Pokażemy, że zachodzą dwie nierówności.

1° $\inf A \leqslant \inf B$.
Weźmy ciąg operatorów T_n taki, że $\lim_{n\to\infty} \|T_n\|\|{T_n}^{-1}\| = \inf B$. Chcemy pokazać, że $\|T_n\|\|{T_n}^{-1}\| \in$

A. Wystarczy by po podstawieniu w definicji zbioru A wartości $a = \frac{1}{\|T_n{}^{-1}\|}$, $b = \|T_n\|$ i $T = T_n$ spełniony był warunek

$$\frac{1}{\|T_n{}^{-1}\|} B_Y \subset T_n B_X \subset \|T_n\| B_Y.$$

Z Lematu 13 mamy $T_n B_X \subset \|T_n\| B_Y$.
W celu udowodnienia lewej nierówności mnożymy obie strony przez $\|T_n{}^{-1}\| T_n^{-1}$, otrzymując równoważną postać

$$T_n{}^{-1} B_Y \subset \|T_n{}^{-1}\| B_X,$$

a następnie ponownie stosujmy Lemat 13.

2° $\inf B \leqslant \inf A$.
Dla każdego $c \in A$, wykażemy istnienie operatora T_c, takiego, że

$$T_c \in \mathrm{L}(X, Y) \ \text{ oraz } \ \|T_c\| \|T_c{}^{-1}\| \leqslant c.$$

Ponieważ $c \in A$, istnieją pewne stałe $\frac{b}{a} = c$ oraz operator T_c, takie, że

$$aB_Y \subset T_c B_X \subset bB_Y. \tag{1.1}$$

Skoro $T_c B_X \subset bB_Y$ to zgodnie z Lematem 13 zachodzi $\|T_c\| \leqslant b$. Podobnie z $T_c^{-1} B_Y \subset \frac{1}{a} B_X$, otrzymujemy $\|T_c^{-1}\| \leqslant \frac{1}{a}$. Zatem

$$\|T_c\| \|T_c{}^{-1}\| \leqslant \frac{b}{a} = c.$$

□

W nowej definicji interesują nas tylko normy operatorów. To podejście czasem ułatwia rachunki - będziemy z niego korzystać niejednokrotnie.
Przejdźmy teraz do kluczowej własności kompaktu Banacha-Mazura. Nazwa kompakt wzięła się od angielskiego słowa „compactum” oznaczającego przestrzeń zwartą. Dowód tego, że rozważana przestrzeń rzeczywiście jest zwarta przebiegnie w dwóch krokach.
Skorzystamy z następującego twierdzenia

Twierdzenie 15. *Przestrzeń metryczna (X, d) jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy jest zupełna i całkowicie ograniczona (tj. dla każdego $\varepsilon > 0$ można ją pokryć skończoną liczbą kul o średnicach mniejszych od ε).*

Twierdzenie to pozostawiamy bez dowodu. Można go znaleźć w [2].

Lemat 16. *Przestrzeń $(\mathcal{C}_n, \rho)$ jest zupełna.*

Dowód. Niech L_n będzie ciągiem Cauchy'ego. Wtedy istnieje podciąg n_k, taki, że

$$d_{BM}(L_{n_k}, L_{n_{k+1}}) \leqslant 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+2}.$$

Zdefiniujmy ciąg $\tilde{L}_n$ w następujący sposób:

$$\tilde{L}_0 = L_{n_0}$$
$$\tilde{L}_k = T_k L_{n_k},$$

gdzie T_k jest operatorem spełniającym

$$\tilde{L}_{k-1} \subset T_k L_{n_k} \subset \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\right) \tilde{L}_{k-1}.$$

Wtedy $\tilde{L}_k \sim L_{n_k}$, czyli rozpatrujemy elementy tej samej klasy. Szukanym ciałem granicznym jest

$$\tilde{L} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \prod_{l=k}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2l}\right) \tilde{L}_k.$$

Zauważmy bowiem, że $\lim\limits_{k\to\infty} \prod\limits_{l=k}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2l}\right) = 1$, gdyż iloczyn dla $k = 0$ jest skończony, a wszystkie czynniki są malejącymi liczbami z przedziału $(1, 2)$.

□

Lemat 17. *Przestrzeń $(\mathcal{C}_n, \rho)$ jest całkowicie ograniczona.*

Dowód. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Skorzystamy z twierdzenia Johna udowodnionego w kolejnym rozdziale. Dla dowolnego ciała $L \in \mathcal{C}_n$ istnieje taki izomorfizm T, że ciało $K = TL$ spełnia

$$B_2 \subset K \subset \sqrt{n} B_2.$$

Niech $\mathcal{N}_{\varepsilon/2}$ będzie $\frac{\varepsilon}{2}$ siecią w kuli $\sqrt{n}B_2$. Rozpatrzmy zbiór

$$\mathcal{M}_{K,\varepsilon} = \left\{ x_i \in \mathcal{N}_{\varepsilon/2} : \operatorname{dist}(x_i, K) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

i niech

$$\tilde{K} = \operatorname{conv}(\pm \mathcal{M}_{K,\varepsilon}) + \frac{\varepsilon}{2} B_2. \tag{1.2}$$

Zauważmy, że zbiór $\tilde{K}$ jest zwarty, środkowosymetryczny, wypukły (jako suma Minkowskiego zbiorów wypukłych) i ma niepuste wnętrze, a zatem $\tilde{K} \in \mathcal{C}_n$. Zachodzi

$$\begin{aligned} \tilde{K} &\subset K + \frac{\varepsilon}{2} B_2^n + \frac{\varepsilon}{2} B_2^n = K + \varepsilon B_2 \\ &\subset K + \varepsilon K = (1 + \varepsilon) K. \end{aligned}$$

Pokażemy, że $K \subset \tilde{K}$

$$\begin{aligned} x \in K &\Rightarrow \exists_{y \in \mathcal{N}_{\varepsilon/2}} \|x - y\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \\ &\Rightarrow \exists_{y \in \mathcal{M}_{K,\varepsilon}} \|x - y\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \\ &\Rightarrow x \in \mathcal{M}_{K,\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} B_2^n \subset \tilde{K}. \end{aligned}$$

Ostatecznie otrzymaliśmy

$$K \subset \tilde{K} \subset (1 + \varepsilon) K,$$

czyli $d_{BM}(K, \tilde{K}) \leqslant (1 + \varepsilon)$. Tymczasem jest skończenie wiele podzbiorów zbioru $\mathcal{N}_{\varepsilon/2}$, a zatem jest tylko skończenie wiele ciał postaci (1.2). Dla $\eta = \ln(1 + \varepsilon)$ przestrzeń $(\mathcal{C}_n, \rho)$ jest η-ograniczona, co wobec dowolności ε dowodzi tezy. □

Twierdzenie 18. *Przestrzeń $(\mathcal{C}_n, \rho)$ jest zwarta.*

Dowód. Wynika to z poprzednich dwóch lematów i Twierdzenia 15. □

Rozdział zakończymy przykładem w którym policzymy odległość pomiędzy dwiema bryłami.

Przykład 19.

$$d_{BM}(B_2^n, B_p^n) = n^{|1/2-1/p|}$$

Dowód. Skorzystamy z Twierdzenia 14. Za X weźmy przestrzeń $\mathbb{R}^n$ z normą $\|\cdot\|_2$, a za Y przestrzeń $\mathbb{R}^n$ z normą $\|\cdot\|_p$.
Rozpatrzmy dwa przypadki
1° $p \leqslant 2$
Zauważmy, że dla niezależnych zmiennych losowych ε_i o rozkładach $\mathbb{P}(\varepsilon_i = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_i = -1) = \frac{1}{2}$, zachodzi

$$\mathbb{E}\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_2^2 \tag{1.3}$$

Weźmy wektor losowy $e = \sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i e_i$. Zachodzi

$$\|e\|_p = n^{\frac{1}{p}},$$

a zatem mamy również

$$\mathbb{E}\|\sum \varepsilon_i e_i\|_p^2 = n^{\frac{2}{p}}. \tag{1.4}$$

Rozpatrzmy operator $T : l_p^n \to l_2^n$. Korzystając z (1.3) i z definicji normy otrzymujemy

$$\mathbb{E}\|\sum \varepsilon_i T e_i\|_2^2 = \sum \|Te_i\|_2^2 \leqslant \|T\|^2 \sum \|e_i\|_p^2 \leqslant \|T\|^2 n. \tag{1.5}$$

Z drugiej strony

$$\mathbb{E}\|\sum \varepsilon_i T e_i\|_2^2 = \mathbb{E}\|T(\sum \varepsilon_i e_i)\|_2^2 \tag{1.6}$$

$$\geqslant \mathbb{E}\|T^{-1}\|^{-2}\|\sum \varepsilon_i e_i\|_p^2 \tag{1.7}$$

$$= \|T^{-1}\|^{-2} n^{\frac{2}{p}}, \tag{1.8}$$

gdzie (1.6) wynika z liniowości T. W (1.7) korzystamy z tego, że

$$\|x\|_p = \|T^{-1}Tx\|_p \leqslant \|T^{-1}\|\|Tx\|_2,$$

czyli

$$\frac{1}{\|T^{-1}\|}\|x\|_p \leqslant \|Tx\|_2,$$

a równość (1.8) wynika z (1.4).
Ostatecznie z (1.5) i (1.8) mamy

$$\|T\|^2 n \geqslant \|T^{-1}\|^{-2} n^{\frac{2}{p}},$$

czyli

$$\|T^{-1}\|\|T\| \geqslant n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}. \tag{1.9}$$

Do udowodnienia nierówności w drugą stronę za T weźmiemy przekształcenie identycznościowe $I_n : l_p \to l_2$. Mamy

$$\|x\|_2 \leqslant \|x\|_p \Rightarrow \|I_n\| \leqslant 1.$$

Z kolei z nierówności Höldera otrzymujemy

$$\|x\|_p^p = \left(\sum |x_i|^p \cdot 1\right) \leqslant \left(\sum (|x_i|^p)^{2/p}\right)^{p/2} \left(\sum 1\right)^{1-\frac{p}{2}} = \|x\|_2^{p/2} n^{1-\frac{p}{2}}.$$

Zatem

$$\|x\|_p \leqslant n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \|x\|_2,$$

czyli

$$\|I_n^{-1}\| \leqslant n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.$$

2° $p > 2$

Zauważmy, że skoro $S : l_2^n \to l_p^n$, to $S^* : l_q^n \to l_2^n$, gdzie q spełnia $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Wtedy oczywiście $q \leqslant 2$ i korzystając z (1.9) mamy

$$\|S\| \|S^{-1}\| = \| \left(S^*\right)^{-1} \| \|S^*\| \geqslant n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} = n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}.$$

Analogicznie dowodzimy, że identyczność $I_n : l_2^n \to l_p^n$ spełnia

$$\|I^{-1}\| \|I\| \leqslant n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}.$$

$\square$

Rozdział 2

Twierdzenie Johna

W tym paragrafie pokażemy, że dla dowolnych ciał $K, L \in \mathcal{C}_n$ zachodzi $d_{BM}(K, L) \leqslant n$. Zacznijmy od wprowadzenia oznaczeń

Definicja 20. *Elipsoidą w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ nazywamy zbiór postaci*

$$D = \{x : \langle Tx, x \rangle \leqslant 1 \text{ dla pewnego przekształcenia liniowego } T\}.$$

Można wykazać, że dla każdej elipsy D istnieje przekształcenie ortogonalne S takie, że SD ma następującą postać

$$SD = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + ... + \frac{x_n^2}{a_n^2} \leqslant 1 \right\}, \text{ dla pewnych } a_i \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Będziemy również korzystać z pojęcia objętości. Wykorzystamy n-wymiarową miarę Lebesgue'a. Nie jest jednak ważne jak unormujemy miarę - istotny będzie jedynie stosunek objętości, dlatego wygodnie będzie nam przyjąć, że kula jednostkowa ma miarę równą 1.

Definicja 21. *Objętością ciała $K \in \mathcal{C}_n$ nazywamy liczbę $vol(K) = \frac{1}{\lambda_n(B_n)}\lambda_n(K)$, gdzie λ_n to n-wymiarowa miara Lebesgue'a.*

Uwaga 22. *Niech $D \subset \mathbb{R}^n$ będzie elipsoidą postaci (2.1). Wtedy, korzystając z twierdzenia o zamianie zmiennych otrzymujemy $\lambda_n(D) = a_1 a_2 ... a_n$.*

W dowodzie twierdzenia Johna skorzystamy z następującego lematu

Lemat 23. *Niech $d > \sqrt{n}$ i $K = conv(B_n, \pm(d, 0, 0, ..., 0))$. Wtedy jeśli $a > d$ i zachodzi warunek*

$$\frac{a^2}{d^2} + \left(1 - \frac{1}{d^2}\right) b^2 \leqslant 1,$$

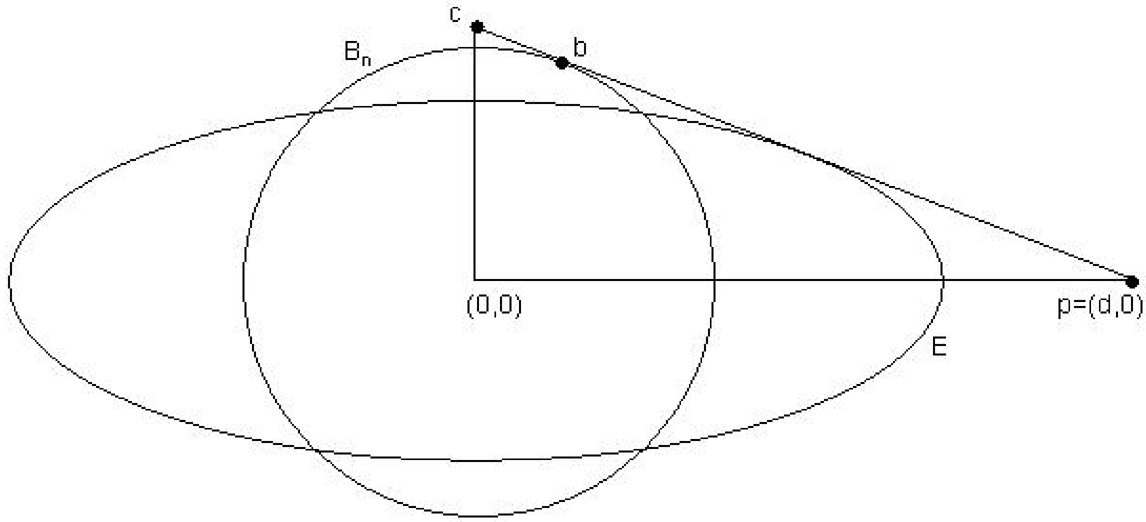
to elipsoida

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{x_1^2}{a^2} + \sum_{i=2}^{n} \frac{x_i^2}{b^2} \leqslant 1 \right\}$$

jest podzbiorem K.

Dowód. Pokażemy, że brzeg zbioru E jest zawarty w zbiorze K. Z wypukłości E i K będzie zachodzić $E \subset K$.
Bez straty ogólności przyjmijmy, że $x \in \mathrm{bd}E$ to punkt spełniający $x_i \geqslant 0$, dla $i = 1, 2, ..., n$. Rozpatrzmy dowolny dwuwymiarowy przekrój przechodzący przez punkty $0 = (0, 0, ...0), p =$

$(d, 0, ..., 0)$.
Dla ustalenia uwagi przejdźmy do współrzędnych dwuwymiarowych.



Niech b będzie takim punktem o dodatnich wspórzędnych, że styczna do B_n poprowadzona przez ten punkt przecina oś X w p (zgodnie z rysunkiem).
Przedłużmy prostą łączącą p z b, tak by przecinała oś pionową. Policzmy współrzędne punktu przecięcia na rzucie.
Z przystawania trójkątów o wierzchołkach $0, b, p$ i $b, c, 0$, gdzie c to szukany punkt przecięcia wynika, że

$$c = \left(0, \frac{d}{\sqrt{d^2 - 1}}\right).$$

Wystarczy pokazać, że brzeg elipsy leżący w pierwszej ćwiartce jest zawarty w trójkącie o wierzchołkach $c, 0, p$. Weźmy takie przekształcenie liniowe, by obrazem odcinka $[c, p]$ był odcinek łączący punkty $(0, 1)$ i $(1, 0)$. Niech

$$T(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{d}, \frac{x_2}{\frac{d}{\sqrt{d^2-1}}}\right).$$

Przy tym przekształceniu obrazem przekroju elipsy E jest

$$E' = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \frac{x_1^2 d^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2}\left(\frac{d}{\sqrt{d^2 - 1}}\right)^2 \leqslant 1\right\}$$
$$= \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \frac{x_1^2 d^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2}\frac{d^2}{d^2 - 1} \leqslant 1\right\}.$$

Brzeg otrzymanej elipsy możemy sparametryzować w następujący sposób:

$$x_1 = \frac{a}{d}\cos t, \quad x_2 = \frac{b\sqrt{d^2 - 1}}{d}\sin t. \tag{2.2}$$

Ponieważ wciąż rozpatrujemy punkt o dodatnich współrzędnych, wystarczy już tylko pokazać, że

$$x_1 + x_2 \leqslant 1.$$

Rozpatrzmy dwie liczby zespolone

$$z_1 = \frac{a}{d} + i\frac{b\sqrt{d^2 - 1}}{d}, \quad z_2 = \cos t - i\sin t. \tag{2.3}$$

zauważmy, że $|z_2| = 1$ i zgodnie z warunkiem z twierdzenia mamy $|z_1| \leqslant 1$. Zatem $|z_1 z_2| \leqslant 1$ oraz $|\mathrm{Re}(z_1 z_2)| \leqslant 1$.
Mamy więc

$$\mathrm{Re}(z_1 z_2) = \frac{a}{d}\cos t + \frac{b\sqrt{d^2-1}}{d}\sin t \leqslant 1,$$

czyli

$$x_1 + x_2 \leqslant 1.$$

□

Lemat 24 (o istnieniu elipsoidy o największej objętości)**.** *Niech $K \in \mathcal{C}_n$. Wówczas w K można wpisać elipsoidę D o największej objętości.*

Dowód. Niech $\mathcal{M} = \{T \in M_{n\times n} : TB_2 \subset K\}$. Zbiór $\mathcal{M}$ jest domkniętą i ograniczoną podprzestrzenią $\mathbb{R}^{n^2}$. $\mathcal{M}$ jest zatem zbiorem zwartym.
Weźmy funkcję $T \longmapsto |\det T|$. Ponieważ jest ona ciągła i określona na zbiorze zwartym, to osiąga maksimum w pewnym $T_0 \in \mathcal{M}$. Szukaną elipsoidą jest zbiór $T_0 B_2$. □

W niektórych zastosowaniach przydatna może okazać się jednoznaczność maksymalnej elipsoidy. Prawdziwa jest następująca

Uwaga 25. *Dla każdego ciała $K \in \mathcal{C}_n$ istnieje dokładnie jedna elipsoida o największej objętości.*

W dowodzie twierdzenia Johna jednoznaczność nie będzie nam potrzebna, dlatego dowód powyższej uwagi pomijamy. Można go znaleźć w [4].

Twierdzenie 26 (Fritz John)**.** *Niech $K \in \mathcal{C}_n$, a zbiór D będzie elipsoidą o największej objętości, wpisaną w K. Zachodzi wtedy*

$$D \subset K \subset \sqrt{n}D.$$

Dowód. Niech $D \subset K$, $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ i $Y = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_D)$ będą przestrzeniami z normami indukowanymi odpowiednio przez zbiory K i D, tzn. $\|x\| = \inf\{t > 0 : x \in tK\}$. Ponieważ D jest wpisany w zbiór K, to $\|x\| \leqslant \|x\|_D$.
Chcemy pokazać, że $K \subset \sqrt{n}D$. Bez straty ogólności możemy założyć, że D ma postać (2.1). Izomorfizm $(x_1, ..., x_n) \mapsto (\frac{1}{a_1}x_1, ..., \frac{1}{a_n}x_n)$ przekształca D na euklidesową kulę jednostkową. Możemy zatem zakładać, że

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant 1\},$$

a wtedy D indukuje normę euklidesową.
Przypuśćmy, że $K \nsubseteq \sqrt{n}D$. Wtedy istnieje $p \in K$ taki, że $\|p\|_2 > \sqrt{n}$. Ponieważ $D \subset K$ i zbiór K jest wypukły to

$$L = \mathrm{conv}(D \cup \{\pm p\}) \subset K.$$

Pokażemy, że w zbiorze L (a zatem także w zbiorze K) zawarta jest elipsoida o większej objętości niż D.
Znów bez straty ogólności możemy założyć, że $p = (d, 0, 0, ..., 0)$, gdzie $d > \sqrt{n}$ - wystarczy wziąć odpowiednie przekształcenie liniowe.

Drogą do znalezienia elipsoidy o większej objętości będzie rozszerzenie kuli D wzdłuż pierwszej osi, odpowiednio zmniejszając pozostałe współrzędne.
Zgodnie z Uwagą 22,

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n : \frac{x_1^2}{a^2} + \sum_{i=2}^{n} \frac{x_i^2}{b^2} \leqslant 1\}$$

ma objętość $a \cdot b^{n-1}$.
Zauważmy, że para

$$a = \frac{d}{\sqrt{n}},\ b = \frac{\sqrt{1 - 1/n}}{\sqrt{1 - 1/d^2}}$$

spełnia założenia Lematu 23, zatem $E \subset L$. Pozostało pokazać, że $\mathrm{vol}(E) > \mathrm{vol}(D)$. W tym celu udowodnimy, nierówność $a \cdot b^{n-1} > 1$. Niech $d^2 = cn$, gdzie $c > 1$. Zachodzi wtedy

$$b^2 = \frac{1 - 1/n}{1 - 1/cn} = \frac{cn - c}{cn - 1} = 1 - \frac{c - 1}{cn - 1}.$$

Ponieważ c jest ostro większe od 1, to na podstawie ostrej nierówności Bernoulliego

$$\left(b^2\right)^{n-1} = \left(1 - \frac{c-1}{cn-1}\right)^{n-1} > 1 - \frac{c-1}{cn-1}(n-1) > 1 - \frac{c-1}{c(n-1)}(n-1) = \frac{1}{c} = \frac{1}{a^2}.$$

Po pomnożeniu obu stron przez a^2 i wzięciu pierwiastka otrzymujemy szukaną nierówność. Zatem $\mathrm{vol}(E) > \mathrm{vol}(D)$, a w związku z tym założenie $L \not\subseteq \sqrt{n}D$ prowadzi do sprzeczności z maksymalnością D. □

Rozdział 3

Twierdzenie Gluskina

Zajmiemy się teraz dolnym ograniczeniem na średnicę kompaktu Banacha-Mazura. W 1981 roku Efim D. Gluskin [3] pokazał, że diam $\mathcal{C}_n \geqslant cn$, gdzie $c > 0$ jest pewną uniwersalną stałą, niezależną od wymiaru przestrzeni.
Udowodnimy następujące

Twierdzenie 27. *Istnieje stała $c > 0$ taka, że dla każdaj liczby naturalnej n istnieją ciała wypukłe $K, L \in \mathcal{C}_n$ takie, że $d_{BM}(K, L) > cn$.*

Wprowadzimy specjalną klasę n-wymiarowych ciał wypukłych. Rozpatrzymy takie, które mają co najwyżej $2n + 2m$ wierzchołków z których $2n$ to wersory i ich odbicia względem 0, a pozostałe $2m$ to symetryczne pary punktów losowo wybranych ze sfery euklidesowej.
Na zbiorze tych ciał wprowadzimy miarę probabilistyczną - będzie to po prostu produkt m unormowanych miar na sferze (wybór m punktów sfery zadaje ciało powyższej klasy).
W dowodzie pokażemy, że zbiór par ciał których odległość jest większa od cn ma dodatnią miarę.

Zacznijmy od ustalenia oznaczeń:
$M_{n\times n}$ - grupa odwracalnych macierzy $n \times n$ o współczynnikach rzeczywistych.
$\lambda(\cdot)$ - znormalizowana miara Haara podzbiorów sfery S_{n-1} (niezmiennicza ze względu na grupę obrotów)
vol$(\cdot)$ - miara Lebesgue'a przestrzeni $\mathbb{R}^n$

Zbiór z którego będziemy „losować" opisane powyżej przestrzenie zdefiniujemy jako $\mathcal{A}_m := S_{n-1}^m$, gdzie S_{n-1} to sfera w $\mathbb{R}^n$. Produktową miarę probabilistyczną na $\mathcal{A}_m$ oznaczymy przez $\lambda^{(m)}(\cdot)$.
Dla każdego elementu $(f_j)_{i=1}^m \in \mathcal{A}_m$ określamy jednoznacznie przestrzeń Banacha E, której kula B_E jest kombinacją wypukłą wektorów jednostkowych i współrzędnych $\mathcal{A}_m$, tzn.

$$B_E := \text{conv}\ \{\pm e_i, \pm f_j\ :\ i = 1, ..., n; j = 1, ..., m\}.$$

Zauważmy, że dla zbioru B należącego do σ-ciała borelowskich podzbiorów sfery n wymiarowej, miara $\lambda(B)$ jest równoważna mierze wycinków kuli zdefiniowanej jako $\mu(B) := \frac{\text{vol}(\{tx\ :\ t\in(0,1)\wedge x\in B\})}{\text{vol}(S_{n-1})}$. Wynika to z jednoznaczności miary Haara (obie miary są niezmiennicze ze względu na obroty i unormowane - są zatem tożsame).

W dowodzie twierdzenia skorzystamy z dwóch lematów. Pierwszy z nich (Lemat 32) udowodnimy w kilku krokach - wykorzystamy następujący fakt, pomocny w liczeniu objętości dowolnej kuli w $\mathbb{R}^n$.

Fakt 28. *Niech $\|\cdot\|$ będzie normą na przestrzeni $\mathbb{R}^n$, B kulą w tej normie, a B_2 i S_2 odpowiednio jednostkową euklidesową kulą i sferą. Zachodzi wtedy*

$$\frac{vol(B)}{vol(B_2)} = \int_{S_2} \frac{1}{\|x\|^n} dx.$$

Dowód. Niech $r(\theta)$ oznacza promień kuli B w kierunku $\theta \in S_2$. Zauważmy, że

$$\mathrm{vol}B = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_B(x)dx = \int_0^\infty \int_{S_{n-1}} \mathbb{1}_B(s\theta)s^{n-1}d\theta ds \tag{3.1}$$

$$= \int_{S_{n-1}} \int_0^\infty \mathbb{1}_B(s\theta)n\mathrm{vol}(B_2)s^{n-1}dsd\lambda(\theta) \tag{3.2}$$

$$= \mathrm{vol}B_2 \int_{S_{n-1}} \int_0^{r(\theta)} ns^{n-1}dsd\lambda(\theta) = \mathrm{vol}B_2 \int_{S_{n-1}} r(\theta)^n d\lambda(\theta),$$

gdzie $d\theta$ w (3.1) oznacza miarę powierzchniową na sferze jednostkowej.
Równość (3.2) wynika z unormowania miary $d\theta$ względem miary Lebesgue'a. Cała sfera jednostkowa ma bowiem miarę $n\mathrm{vol}B_2$ (aby to udowodnić wystarczy za B wziąć B_2 i skorzystać z (3.1)).
Zauważmy, że $r(\theta) = \frac{1}{\|\theta\|}$. Dzieląc obie strony równości przez $\mathrm{vol}B_2$ otrzymujemy tezę. □

Drugim potrzebnym faktem jest nierówność Cheveta, która pozwala nam oszacować wartość oczekiwaną kwadratu normy losowej macierzy gaussowskiej.

Fakt 29 (Nierówność Cheveta)**.** *Niech $G = (g_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ będzie macierzą losową, której wyrazy są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$. Przez $\|\cdot\|_{op}$ oznaczmy normę operatorową w $L(l_2^n, l_2^n)$. Istnieje stała c niezależna od n, taka, że*

$$\left(\int_\Omega \|[g_{ij}(\omega)]\|_{op}^2 \, d\mu(\omega)\right)^{1/2} \leqslant c\sqrt{n}.$$

Dowód. Z definicji normy i z faktu, że $\|x\|_2 = \sup\{\sum x_i y_i : \sum y_i^2 \leqslant 1\}$ mamy

$$\begin{aligned}\|G\|_{op} &= \sup\{\|Gx\|_2 : \|x\|_2 \leqslant 1\}\\ &= \sup\left\{\langle Gx, y\rangle : \sum x_i^2 \leqslant 1, \ \sum y_j^2 \leqslant 1\right\}.\end{aligned}$$

Zauważmy, że $\langle Gx, y\rangle = \sum_{i,j\leqslant n} g_{ij}x_i y_j$ ma rozkład $\mathcal{N}(0, \sum_{i,j\leqslant n} x_i^2 y_j^2)$.
Oszacujemy $\mathbb{P}(\|G\|_{op} > t)$. W tym celu weźmy zbiór $\mathcal{M}$ będący maksymalnym podzbiorem B_2, takim, że elementy $\mathcal{M}$ są oddalone od siebie o co najmniej $\frac{1}{2}$ w normie $\|\cdot\|_2$. Zbiór ten tworzy $\frac{1}{2}$-sieć.
Rozpatrzmy kule euklidesowe o promieniach $\frac{1}{4}$ i o środkach w punktach ze zbioru $\mathcal{M}$. Zachodzi

$$\bigcup_{x\in\mathcal{M}} \left(x + \frac{1}{4}B_2\right) \subset \left(1 + \frac{1}{4}\right) B_2.$$

Ponieważ kule są rozłączne mamy

$$|\mathcal{M}| \left(\frac{1}{4}\right)^n \mathrm{vol}B_2 \leqslant \left(\frac{5}{4}\right)^n \mathrm{vol}B_2,$$

czyli $|\mathcal{M}| \leqslant 5^n$. Zachodzi również

$$\sup_{x,y\in B_2^n} \langle Gx, y\rangle \leqslant 2 \sup_{x\in B_2^n, y\in\mathcal{M}} \langle Gx, y\rangle \leqslant 4 \sup_{x,y\in\mathcal{M}} \langle Gx, y\rangle. \tag{3.3}$$

Do udowodnienia pierwszej równości w (3.3) weźmy $y = \frac{Gx}{\|Gx\|_2}$ wybijający supremum oraz $y_0 \in \mathcal{M}$ taki, że $\|y - y_0\| \leqslant \frac{1}{2}$. Wtedy

$$\begin{aligned}\|Gx\|_2 = \langle Gx, y\rangle &= \langle Gx, y_0\rangle + \langle Gx, y - y_0\rangle \\ &\leqslant \langle Gx, y_0\rangle + \|Gx\|_2 \|y - y_0\|_2 \\ &\leqslant \langle Gx, y_0\rangle + \frac{1}{2}\langle Gx, y\rangle,\end{aligned}$$

czyli

$$\langle Gx, y\rangle \leqslant 2\langle Gx, y_0\rangle.$$

Drugą nierówność w (3.3) dowodzimy analogicznie. W rezultacie otrzymujemy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\sup_{x,y\in B_2^n} |\langle Gx, y\rangle| \geqslant t\right) &\leqslant \mathbb{P}\left(\sup_{x,y\in\mathcal{M}} |\langle Gx, y\rangle| \geqslant \frac{t}{4}\right) \\ &\leqslant \sum_{x,y\in\mathcal{M}} \mathbb{P}\left(|\langle Gx, y\rangle| \geqslant \frac{t}{4}\right) \\ &\leqslant \sum_{x,y\in\mathcal{M}} \exp\left(-\left(\frac{t}{4}\right)^2/2\right) \\ &\leqslant 25^n \exp\left(-\frac{t^2}{32}\right).\end{aligned}$$

Mając powyższe oszacowanie możemy już łatwo uzyskać tezę lematu. Zachodzi bowiem

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\|G\|_{op}^2 &= 2\int_0^\infty t\mathbb{P}\left(\|G\|_{op} \geqslant t\right) \mathrm{d}t \\ &\leqslant 2\int_0^{c\sqrt{n}} t\mathrm{d}t + \int_{c\sqrt{n}}^\infty 25^n \exp\left(-\frac{t^2}{32}\right) \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Drugą całkę szacujemy podstawiając $t = sc\sqrt{n}$, wtedy dla dostatecznie dużych c zachodzi

$$\begin{aligned}\int_{c\sqrt{n}}^\infty 25^n \exp\left(-\frac{t^2}{32}\right) \mathrm{d}t &= \int_1^\infty \exp\left(n\ln 25 - \frac{nc^2s^2}{32}\right) \mathrm{d}s \\ &= c\sqrt{n}\int_1^\infty \left(\exp\left(\ln 25 - \frac{c^2s^2}{32}\right)\right)^n \mathrm{d}s \\ &= c\sqrt{n}25^n \int_1^\infty \exp\left(-\frac{nc^2s^2}{32}\right) \mathrm{d}s \\ &\leqslant c\sqrt{n}25^n \int_1^\infty \exp\left(-s\frac{nc^2}{32}\right) \mathrm{d}s = c\sqrt{n}25^n \frac{\exp\left(-\frac{nc^2}{32}\right)}{\frac{nc^2}{32}} \\ &\leqslant \frac{32}{c} n^{-1/2} \left(\frac{25}{\exp\left(\frac{c^2}{32}\right)}\right)^n \leqslant \frac{32}{c}\left(\frac{25}{\exp\left(\frac{c^2}{32}\right)}\right) = D,\end{aligned}$$

gdzie D nie zależy od n. Zachodzi wtedy

$$\mathbb{E}\|G\|_{op}^2 \leqslant c^2 n + D \leqslant c' n.$$

$\square$

Fakt 30. *Niech $G = [g_{ij}]_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ będzie macierzą losową, gdzie g_{ij} są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$. Zachodzi wtedy*

$$\left(\int_S \|x\|_{op}^2 d\lambda(x)\right)^{1/2} = \frac{1}{n}\left(\int_\Omega \|[g_{ij}(\omega)]\|_{op}^2 d\mu(\omega)\right)^{1/2}, \tag{3.4}$$

Dowód. Zauważmy, że jeśli $g_1, ..., g_m$, są niezależnymi zmiennymi o rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$ to dla wektora $g = (g_1, ..., g_m)$ mamy

$$g = \frac{g}{\|g\|_2}\|g\|_2,$$

gdzie $\frac{g}{\|g\|_2}$ i $\|g\|_2$ są niezależne. Ponieważ rozkład $\frac{g}{\|g\|_2}$ jest miarą na sferze S_{m-1} niezmienniczą na obroty, to z jednoznaczności miary Haara $\frac{g}{\|g\|_2} \sim \lambda_m$.
Dla dowolnej normy $\|\cdot\|$ na $\mathbb{R}^m$ mamy zatem

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\|g\|^2 &= \mathbb{E}\left(\left\|\frac{g}{\|g\|_2}\right\|^2\|g\|_2^2\right)\\ &= \mathbb{E}\left\|\frac{g}{\|g\|_2}\right\|^2\mathbb{E}\|g\|_2^2\\ &= \left(\int\limits_{S_{m-1}} \|x\|^2 d\lambda(x)\right) m\end{aligned}$$

Po podzieleniu przez m, podstawieniu $m = n^2$ i wzięciu pierwiastka kwadratowego otrzymujemy tezę. $\square$

Dzięki powyższym faktom jesteśmy gotowi do udowodnienia pierwszego z dwóch lematów

Lemat 31. *Niech $\|\cdot\|_{op}$ i $\|\cdot\|_{HS}$ oznaczają normy na przestrzeni $\mathbb{R}^{n^2} = M_{n\times n}$ indukowane przez normę operatorową $L(l_2^n, l_2^n)$ i normę Hilberta-Schmidta (tj. dla $A \in M_{n\times n}$ mamy $\|A\|_2 = \left(\sum_{i\in I}\|Ae_i\|^2\right)^{1/2}$). Niech U_{op} i U_{HS} oznaczają odpowiednio kule jednostkowe w tych normach. Zachodzi wtedy*

$$\frac{vol\ U_{op}}{vol\ U_{HS}} \geqslant (cn)^{n^2/2},$$

gdzie c jest pewną stałą niezależną od wymiaru.

Dowód. Zauważmy, że U_{HS} jest po prostu kulą euklidesową w przestrzeni $\mathbb{R}^{n^2}$. Korzystając z Faktu 28 otrzymujemy

$$\frac{\text{vol } U_{op}}{\text{vol } U_{HS}} = \int_{\text{bd } U_{HS}} \|x\|_{op}^{-n^2} d\lambda(x),$$

gdzie $\lambda = \lambda_{n^2-1}$ jest miarą Haara na brzegu U_{HS}, czyli na sferze jednostkowej S_{n^2-1}. Oznaczmy tę sferę przez S. Nierówność Höldera daje nam

$$\begin{aligned}1 = \int_S 1 d\lambda(x) &\leqslant \left(\int_S \|x\|_{op}^2 d\lambda(x)\right)^{1/2}\left(\int_S \|x\|_{op}^{-2} d\lambda(x)\right)^{1/2}\\ &\leqslant \left(\int_S \|x\|_{op}^2 d\lambda(x)\right)^{1/2}\left(\int_S \|x\|_{op}^{-n^2} d\lambda(x)\right)^{1/n^2}.\end{aligned}$$

Zatem

$$\frac{\text{vol } U_{op}}{\text{vol } U_{HS}} \geqslant \left(\int_S \|x\|_{op}^2 d\lambda(x)\right)^{-n^2/2}. \tag{3.5}$$

Korzystając z Faktu 30 mamy

$$\left(\int_S \|x\|_{op}^2 d\lambda(x)\right)^{1/2} = \frac{1}{n}\left(\int_\Omega \|[g_{ij}(\omega)]\|_{op}^2 d\mu(\omega)\right)^{1/2}, \tag{3.6}$$

gdzie $\{g_{ij}\}$ są niezależnymi zmiennymi o standardowym rozkładzie Gaussa na przestrzeni probabilistycznej (Ω, μ). Z nierówności Cheveta otrzymujemy

$$\int_\Omega \|[g_{ij}(\omega)]\|_{op}^2 \mu(\omega) \leqslant cn,$$

gdzie c jest stałą niezależną od n. To oszacowanie wraz z (3.5) i (3.6) daje tezę (ze stałą c^{-1})

$$\frac{\text{vol } U_{op}}{\text{vol } U_{HS}} \geqslant \left(\frac{1}{n^2}\int_\Omega \|[g_{ij}(\omega)]\|_{op}^2 d\mu(\omega)\right)^{-n^2/2} \geqslant \left(\frac{1}{n^2}cn\right)^{-n^2/2} = \left(c^{-1}n\right)^{n^2/2}.$$

□

Lemat 32. *Niech* $\alpha = (6\frac{e^3}{\pi})^{1/2}$. *Dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych* m, *jeśli* $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *ma wyznacznik* 1 *i jeśli* $B \in \mathcal{A}_m$, *to dla każdego* $0 < \rho < 1$ *zachodzi*

$$\lambda^{(m)}\left\{A \in \mathcal{A}_m : \|T : E_A \to E_B\| \leqslant \rho\frac{n^{3/2}}{\alpha(m+n)}\right\} \leqslant \rho^{nm},$$

gdzie $\lambda^{(m)}$ *oznacza produkt* m *miar Haara na* $(S_{n-1})^m = \mathcal{A}_m$.

Dowód. Niech $B = \{y_i\}$ będzie wektorem z $\mathcal{A}_m$, a $\tilde{B}$ odpowiadającym mu ciałem wypukłym

$$\tilde{B} = \text{conv}\{\pm e_i, \pm y_j : i = 1, ..., n; j = 1, ..., m\}.$$

Ustalmy $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ taki, że $\det T = 1$ oraz $0 < \rho < 1$. Zauważmy, że jeśli dla $A = \{f_j\} \in \mathcal{A}_m$ mamy

$$\|T : E_A \to E_B\| \leqslant \rho\frac{n^{3/2}}{\alpha(m+n)}$$

dla pewnego $\alpha > 0$, to każdy f_j musi być zawarty w zbiorze

$$\left\{x \in S_{n-1} : \|Tx\|_{E_B} \leqslant \rho\frac{n^{3/2}}{\alpha(m+n)}\right\}.$$

Zatem

$$\lambda^{(m)}\left\{A \in \mathcal{A}_m : \|T : E_A \to E_B\| \leqslant \rho\frac{n^{3/2}}{\alpha(m+n)}\right\} \leqslant \left(\lambda\left\{x \in S_{n-1} : \|Tx\|_{E_B} \leqslant \rho\frac{n^{3/2}}{\alpha(m+n)}\right\}\right)^m. \tag{3.7}$$

Ustalmy $r = \rho n^{3/2}/\alpha(m+n)$. Wtedy

$$\begin{aligned}\lambda\left\{x \in S_{n-1} : \|Tx\|_{E_B} \leqslant \rho\frac{n^{3/2}}{\alpha(m+n)}\right\} &= \lambda\{x \in S_{n-1} : x \in rT^{-1}(\tilde{B})\} \\ &= \lambda(rT^{-1}(\tilde{B}) \cap S_{n-1}).\end{aligned}$$

Niech B_2 oznacza kulę jednostkową w l_2^n i niech $W \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem wypukłym takim, że $0 \in W$. Niech

$$W_1 = \left\{ x \in B_2 : \frac{x}{\|x\|_2} \in W \right\}.$$

Wtedy $W_1 \subset W$, bo

$$\frac{x}{\|x\|_2} \in W \Rightarrow x = \|x\|_2 \frac{x}{\|x\|_2} + (1 - \|x\|_2)0 \in W.$$

Zachodzi więc

$$\lambda(W \cap S_{n-1}) = \frac{\mathrm{vol} W_1}{\mathrm{vol} B_2} \leqslant \frac{\mathrm{vol} W}{\mathrm{vol} B_2},$$

a z tego wynika, że

$$\lambda(rT^{-1}(\tilde{B}) \cap S_{n-1}) \leqslant \frac{\mathrm{vol}(rT^{-1}(\tilde{B}))}{\mathrm{vol} B_2}. \tag{3.8}$$

Szacując ostatnią wielkość przypomnijmy, że $\mathrm{vol} B_2 = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$. Ponieważ $\det T = 1$, mamy również $\mathrm{vol}(rT^{-1}(\tilde{B})) = r^n \mathrm{vol} \tilde{B}$. Zachodzi

$$\tilde{B} \subset \bigcup \mathrm{conv}\{0, x_1, ..., x_n\},$$

gdzie sumowanie przebiaga wszystkie wybory n punktów x_i ze zbioru $\{\pm e_i, \pm g_j\}$. Mamy zatem nierówność $\mathrm{vol} \tilde{B} \leqslant \sum \mathrm{vol}(\mathrm{conv}(0, x_1, ..., x_n))$
Zauważmy, że objętość sympleksu $\mathrm{conv}(0, x_1, ..., x_n)$ jest równa

$$\mathrm{vol}(\mathrm{conv}(0, e_1, ..., e_n)) \det[(x_1 ... x_n)].$$

Skorzystamy z nierówności Hadamarda [5, s. 384-386]. Ponieważ $x_i \in S_{n-1}$ dla $i = 1, ..., n$ zachodzi

$$\det[(x_1, ..., x_n)] \leqslant \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_i(k)|^2 \right)^{1/2} \leqslant 1.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(\tilde{B}) &\leqslant \sum \mathrm{vol}(\mathrm{conv}(0, x_1, ..., x_n)) \\ &\leqslant \binom{2(m+n)}{n} \mathrm{vol}(\mathrm{conv}(0, e_1, ..., e_n)) \\ &\leqslant \binom{2(m+n)}{n} \frac{1}{n!} \leqslant \left(2e^2 \frac{m+n}{n^2} \right)^n. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Nierówność (3.9) wynika z oszacowania $k! \geqslant \left(\frac{k}{e}\right)^k$ będącego wnioskiem ze wzoru Stirlinga. Mamy bowiem $\frac{1}{k!} \leqslant \left(\frac{e}{k}\right)^k$ oraz $\binom{n}{k} \leqslant \frac{n^k}{k!} \leqslant \left(\frac{n \cdot e}{k}\right)^k$. Na koniec oszacujmy jeszcze wartość $\frac{1}{\mathrm{vol} B_2}$. W tym celu udowodnimy, że

$$\Gamma(n/2 + 1) \leqslant \left(\frac{3n}{2e} \right)^{n/2}.$$

Łatwo sprawdzić, że nierówność jest spełniona dla $n \leqslant 2$, a dalej korzystamy z indukcji zwiększając n o 2. Mamy wtedy

$$\Gamma\left(\frac{n+2}{2} + 1\right) \leqslant \left(\frac{n}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) \leqslant \left(\frac{n}{2} + 1\right) \left(\frac{3n}{2e}\right)^{n/2} \leqslant \left(\frac{3(n+2)}{2e}\right) \left(\frac{3(n+2)}{2e}\right)^{n/2}.$$

Zatem

$$\frac{1}{\mathrm{vol}B_2} = \frac{\Gamma(n/2+1)}{\pi^{n/2}} \leqslant \frac{(3n)^{n/2}}{(2\pi e)^{n/2}}$$

Pozostało wstawić otrzymane oszacowania do (3.8) by uzyskać

$$\begin{aligned}\lambda(rT^{-1}(\tilde{B}) \cap S_{n-1}) &\leqslant r^n \frac{\mathrm{vol}\tilde{B}}{\mathrm{vol}B_2} \\ &\leqslant \left[\left(\frac{6e^3}{\pi}\right)^{1/2} \frac{r(m+n)}{n^{3/2}}\right]^n = \rho^n.\end{aligned}$$

Wstawiając tę nierówność do (3.7) otrzymujemy tezę. □

W następnym lemacie wyznaczymy ε-sieć w pewnej klasie operatorów. Z definicji wynika, że w każdej z rozpatrywanych przez nas przestrzeni E_A, dla $A \in \mathcal{A}_n$, kula jednostkowa zawiera wektory $\{e_i\}$. Dlatego każdy operator T, taki, że $\|Te_i\|_{E_B} > \sqrt{n}$ dla pewnego i spełnia również $\|T : E_A \to E_B\| > \sqrt{n}$, dla wszystkich $A \in \mathcal{A}_m$. W związku z tym operatory te będą spełniały żądaną nierówność a priori. Dla zbioru pozostałych operatorów mamy następujący lemat

Lemat 33. *Istnieje stała $a > 1$ taka, że jeśli $B \in \mathcal{A}_m$ i jeśli*

$$\mathcal{M}_B = \left\{T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : \mathit{det}\ T = 1 \ i \ \|Te_i\|_{E_B} \leqslant \sqrt{n} \ \mathit{dla}\ i = 1, ..., n\right\},$$

to dla wszystkich $\varepsilon > 0$ istnieje ε-sieć $\mathcal{N}_B^\varepsilon$ zbioru $\mathcal{M}_B$ w normie operatorów $L(l_2^n, l_2^n)$, taka, że $\mathcal{N}_B^\varepsilon \subset \mathcal{M}_B$ i

$$\mathit{card}\ \mathcal{N}_B \leqslant \left(a\frac{m+n}{m\varepsilon}\right)^{n^2}.$$

Dowód. Ustalmy $B \in \mathcal{A}_m$ i niech $\tilde{B}$ będzie ciałem wypukłym zadanym przez B (tj. uwypukleniem punktów z $\pm B$ i $\pm e_i$). Utożsamiamy $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ z $M_{n\times n}$ biorąc izomorfizm: $T \mapsto (Te_i) \in \mathbb{R}^n$ dla $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. W szczególności utożsamiamy $\mathcal{M}_B$ z podzbiorem $\overline{\mathcal{M}_B}$ zbioru $M_{n\times n}$, tj. definiujemy

$$\overline{\mathcal{M}_B} = \left\{A \in M_{n\times n} : \mathrm{det}A = 1 \text{ oraz } Ae_i \in \sqrt{n}\tilde{B} \text{ dla wszystkich } i = 1, ..., n\right\}.$$

Niech $\|\cdot\|_{op}$ będzie normą na $M_{n\times n}$ indukowaną przez normę operatorową na $L(l_2^n, l_2^n)$ i niech $U_{op} \subset M_{n\times n}$ będzie odpowiednią kulą jednostkową.
Niech $\varepsilon > 0$ i niech $\overline{\mathcal{N}_B^\varepsilon}$ będzie maksymalnym zbiorem elementów $\overline{\mathcal{M}_B}$ takich, że poszczególne punkty są od siebie odległe o ε w normie $\|\cdot\|_{op}$. Zbiór ten jest ε-siecią elementów, bo gdyby istniał element odseparowany od pozostałych o ε to otrzymalibyśmy sprzeczność z maksymalnością $\overline{\mathcal{M}_B}$. Dla $\xi \in \overline{\mathcal{N}_B^\varepsilon}$ kule $\xi + (\varepsilon/2)U_{op}$, są rozłączne.
Zauważmy też, że

$$\|Te_i\|_{E_B} \leqslant \|Te_i\|_{l_1^n} \leqslant \sqrt{n}\|Te_i\|_{l_2^n} \leqslant \sqrt{n}\|T : l_2^n \to l_2^n\|.$$

Wobec tego $U_{op} \subset \overline{\mathcal{M}_B}$, a zatem kule $\xi + (\varepsilon/2)U_{op}$ są zawarte w $(1 + \frac{\varepsilon}{2})\mathcal{M}_B$.
Ponieważ rozpatrywane przestrzenie są izometryczne to odpowiedni zbiór $\mathcal{N}_B^\varepsilon$ też tworzy ε-sieć w $\mathcal{M}_B$. Liczbę $K = \mathrm{card}\ \mathcal{N}_B^\varepsilon$ elementów otrzymanej ε-sieci oszacujemy porównując

objętości zbioru $\overline{\mathcal{M}_B}$ oraz K kulek zawartych w $\overline{\mathcal{M}_B}$.

$$
\begin{aligned}
K\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n^2} \text{vol } U_{op} = \text{vol } \left(\bigcup_{\xi\in\mathcal{N}_B^\varepsilon}\left(\xi+\frac{\varepsilon}{2}U_{op}\right)\right) &\leqslant \text{vol } \left(\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\overline{\mathcal{M}_B}\right) \\
&\leqslant \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n^2} \text{vol } \overline{\mathcal{M}_B}
\end{aligned}
$$

Dzieląc obie strony przez $\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n^2}$ vol U_{op} otrzymujemy nierówność

$$
K \leqslant \left(1+\frac{2}{\varepsilon}\right)^{n^2} \frac{\text{vol } \overline{\mathcal{M}_B}}{\text{vol } U_{op}}.
$$

Pozostało znaleźć górne ograniczenie dla vol $\overline{\mathcal{M}_B}$ i dolne ograniczenie dla vol U_{op}. Zauważmy, że

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathcal{M}_B} &\subset \left\{A\in M_{n\times n} : Ae_i \in (\sqrt{n})\tilde{B} \text{ dla wszystkich } i=1,...,n\right\} \\
&= [\sqrt{n}\tilde{B}]^n \subset M_{n\times n}.
\end{aligned}
$$

Korzystając z (3.9) powyższa nierówność daje nam następujące ograniczenie

$$
\text{vol } \overline{\mathcal{M}_B} \leqslant \left[\text{vol } \sqrt{n}\tilde{B}\right]^n \leqslant \left(2e^2\frac{m+n}{n^{3/2}}\right)^{n^2}.
$$

Drugie ograniczenie wynika bezpośrednio z Lematu 31. Zachodzi

$$
\begin{aligned}
\text{card } \mathcal{N}_B = K &\leqslant \frac{\left(1+\frac{2}{\varepsilon}\right)^{n^2}\left(2e^2\frac{m+n}{n^{3/2}}\right)^{n^2}}{(cn)^{n^2/2}\frac{\pi^{n^2/2}}{\Gamma(n^2/2+1)}} \\
&\leqslant \left(a\frac{m+n}{\varepsilon n}\right)^{n^2}
\end{aligned}
$$

□

Jesteśmy wreszcie gotowi, by udowodnić twierdzenie Gluskina.

Dowód Twierdzenia 27. Niech $m=2n$ i niech α, a będą stałymi z Lematu 32 i 33 odpowiednio. Ustalmy $\rho < \frac{1}{18a\alpha}$. Zauważmy, że dla każdego $\varepsilon>0$ zachodzi

$$
\frac{\rho}{3\varepsilon\alpha} > \frac{2\cdot 3a\rho^2}{\varepsilon},
$$

możemy zatem tak dobrać $\varepsilon>0$ by zachodziło $\frac{\rho}{3\varepsilon\alpha}>1$ oraz $\frac{1}{2}>3a\rho^2/\varepsilon$.

Ustalmy $B\in\mathcal{A}_{2n}$ i rozważmy zbiór

$$
\begin{aligned}
B' = \Big\{A\in\mathcal{A}_{2n} : &\|T : E_A \to E_B\| < \left(\frac{\rho}{3\alpha}-\varepsilon\right)\sqrt{n} \\
&\text{dla pewnego } T\in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n) \text{ o wyznaczniku } 1\Big\}.
\end{aligned}
$$

Chcemy pokazać, że $\lambda^{2n}(B') \leqslant \left(\frac{3a\rho^2}{\varepsilon}\right) < (\frac{1}{2})^{n^2}$. Będzie to w szczególności oznaczało, że dopełnienie zbioru B' ma miarę dodatnią. Wtedy istnieje taka przestrzeń B, że dla wszystkich przekształceń $T : E_A \to E_B$ o wyznaczniku 1 zachodzi $\|T\| \geqslant (\frac{\rho}{3\alpha} - \varepsilon)\sqrt{n}$.

Niech $\mathcal{N}_B^\varepsilon = \{T\}_{k=1}^K$ będzie ε-siecią o mocy $K \leqslant (\frac{3a}{\varepsilon})^{n^2}$ skonstruowaną w Lemacie 33. Niech $A \in B'$ i niech $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ o wyznaczniku równym 1 spełnia $\|T : E_A \to E_B\| < (\frac{\rho}{3\alpha} - \varepsilon)\sqrt{n}$.
Zauważmy, że $\frac{\rho}{3\alpha} - \varepsilon < \frac{\rho}{3\alpha} < 9a\alpha\rho < 1$ zatem $T \in \mathcal{M}_B$.
Niech $T_k \in \mathcal{N}_B^\varepsilon$ spełnia $\|(T - T_k) : l_2^n \to l_2^n\| \leqslant \varepsilon$.
Dla każdego operatora $S \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ zachodzi $\|S : E_A \to E_B\| \leqslant \sqrt{n}\|S : l_2^n \to l_2^n\|$, więc korzystając z nierówności trójkąta dla operatora T_k otrzymujemy nierówność

$$\|T_k : E_A \to E_B\| \leqslant \|T : E_A \to E_B\| + \|(T - T_k) : E_A \to E_B\| \leqslant \left(\frac{\rho}{3\alpha}\right)\sqrt{n}.$$

Zachodzi zatem

$$B' \subset \bigcup_{k=1}^{K} \left\{A \in \mathcal{A}_{2n} : \|T_k : E_A \to E_B\| < \left(\frac{\rho}{3\alpha}\right)\sqrt{n}\right\}.$$

Zgodnie z Lematem 32 mamy

$$\begin{aligned}\lambda^{(2n)}(B') &\leqslant \sum_{k=1}^{K} \lambda^{(2n)}\left\{A \in \mathcal{A}_{2n} : \|T_k : E_A \to E_B\| < (\rho/3\alpha)\sqrt{n}\right\} \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{K} \rho^{2n^2} \leqslant \left(\frac{3a}{\varepsilon}\right)^{n^2} \rho^{2n^2} = \left(\frac{3a\rho^2}{\varepsilon}\right)^{n^2} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2}. \qquad (3.10)\end{aligned}$$

Rozważmy ostatecznie zbiór $G \subset \mathcal{A}_{2n} \times \mathcal{A}_{2n}$ zdefiniowany w następujący sposób

$$\begin{aligned}G = \Big\{(A, B) \in \mathcal{A}_{2n} \times \mathcal{A}_{2n} : \|T : E_A \to E_B\| < \left(\left(\frac{\rho}{3\alpha} - \varepsilon\right)\sqrt{n}\right) \text{ lub} \\ \|T : E_B \to E_A\| < \left(\left(\frac{\rho}{3\alpha} - \varepsilon\right)\sqrt{n}\right) \text{ dla pewnego } T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \\ \text{o wyznaczniku równym 1 } \Big\}.\end{aligned}$$

Z twierdzenia Fubiniego i (3.10) mamy

$$\left(\lambda^{(2n)} \times \lambda^{(2n)}\right)(G) < 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2} \leqslant 1.$$

W związku z tym dopełnienie G jest dodatniej miary. Niech $(A, B) \in G'$. Z definicji zbioru G mamy $\|T : E_A \to E_B\| \geqslant (\frac{\rho}{3\alpha} - \varepsilon)\sqrt{n}$ oraz $\|T : E_B \to E_A\| \geqslant (\frac{\rho}{3\alpha} - \varepsilon)\sqrt{n}$ dla wszystkich operatorów T o wyznaczniku równym 1. Zatem $d_{BM}(E_A, E_B) \geqslant cn$, dla $c = (\frac{\rho}{3\alpha} - \varepsilon)^2$. □

Bibliografia

[1] Keith M. Ball, *An Elementary Introduction to Modern Convex Geometry*, Cambridge University Press 1997, 1-58.

[2] Stanisław Betley, Józef Chaber, Elzbieta Pol i Roman Pol, *Topologia I*, http://duch.mimuw.edu.pl/∼betley/wyklad1/skrypt.pdf.

[3] Efim D. Gluskin, *The diameter of the Minkowski compactum is roughly equal to n.*, Functional Anal. Appl., 15 (1981), 72-73.

[4] Ralph Howard, *The John ellipsoid theorem*, http://www.math.sc.edu/∼howard/Notes/john.pdf.

[5] Andrzej Mostowski, Marceli Stark, *Elementy algebry wyższej*, Wydawnictwo Naukowe PWN 1972.

[6] Walter Rudin, *Analiza funkcjonalna*, Wydawnictwo Naukowe PWN 2001.

[7] Nicole Tomczak-Jaegermann, *Banach-Mazur distances and finite-dimensional operator ideals*, Longman 1989.