MATHF309 Analyse Multivariée 2013

Ex 1. Soit $S \sim W_p(\Sigma, m_1)$ et $T \sim W_p(\Sigma, m_2)$ indépendantes. Trouvez la loi de $S + T$.

Ex 2. Soit $M \sim W_p(\Sigma, m)$ et A une matrice $p \times p$. Déterminez la loi de AMA'.

Ex 3. Trouvez l'estimateur du maximum de vraisemblance de la moyenne μ et de la matrice de covariance, étant donnés l'echantillon

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 4 \\ 5 & 7 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

de la loi normalle bivarié.

Ex 4. Soit $X_1, X_2, ..., X_{20}$ l'echantillon de $\mathcal{N}_6(\mu, \Sigma)$. Déterminez la loi de

1. $(X_1 - \mu)'\Sigma^{-1}(X_1 - \mu)$,
2. $\bar{\mathbf{X}}$,
3. $\sqrt{n}(\bar{\mathbf{X}} - \mu)$,
4. $\mathbf{S}$.

Ex 5. Soit $X_1, X_2, ..., X_{20}$ definis comme dans l'exercice 5. Déterminez la loi de $\mathbf{B}(19\mathbf{S})\mathbf{B}'$ si

(a)
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & -1 \end{bmatrix},$$

(b)
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ex 6. Soit $X_1, X_2, ..., X_{75}$ l'echantillon de la loi avec la moyenne μ et la covariance Σ. Déterminez la loi de

1. $\bar{X}$,
2. $n(\bar{X} - \mu)'S^{-1}(\bar{X} - \mu)$.

Ex 7. Soit $(X_i)_{1 \le i \le n} \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ iid, $T^2(X)$ le test de Hotelling et C une matrice R^p definie positive. Démontrez que

$$T^2(X) \sim T^2(CX).$$

Ex 8. Soit $(X_i)_{1 \le i \le 20} \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ iid. Étant donnés que

$$\bar{\mathbf{X}} = (1, -0.5, 2)' \text{ et } M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

testez l'ypothèse $\mu = 0$ si

1. $\Sigma = M$,
2. on ne connait pas Σ mais on a $\mathbf{S} = M$.

Ex 9. Soit $\mathbf{X}$ une echatillon

$$\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 & 4 & 6 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 & 6 & 3 & 6 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

On sait que la majorité suit la loi normale $\mathcal{N}(0, \Sigma)$, mais il y a une observation d'une autre population. Trouvez cette observarion.

Ex 10. Si $M \sim W_p(\Sigma, m)$ et A est un p-v.a. tel que $P(A'\Sigma A \neq 0) = 1$ qui est indépendant de M, alors

$$A'MA/(A'\Sigma A) \sim \chi^2_m,$$

et cette fraction est indépendante de A.

Ex 11. Soit $X \sim \mathcal{N}_p(\mu, I_p)$ et h une fonction $C_1(-\infty, \infty)$. Prouvez que si $1 \leq i \leq p$, on a

$$E[(\mu_i - X_i)h(\mathbf{X})] = -E\left[\frac{\delta h}{\delta x_i}(\mathbf{X})\right].$$

Ex 12. Soit $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_p(\mu, I_p)$, $p \geq 3$. Prouvez que pour $a = p - 2$ on a

$$E[(\mathbf{X} - \mu)^2] > E\left(\mathbf{X} - \frac{a\mathbf{X}}{\|\mathbf{X}\|^2} - \mu\right)^2.$$