MATHF309 Analyse Multivariée 2014

1. Soit $\Sigma \in \mathbb{R}^{p\times p}$ une matrice symétrique et définie positive. Montrez que $d_\Sigma : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to [0,\infty)$ avec $d^2(x,y) = (x-y)'\Sigma^{-1}(x-y)$ est une distance sur $\mathbb{R}^p$.

2. Montrez que les courbes de niveau de la loi normale p-variée $\mathcal{N}_p(\mu,\Sigma)$, $\Sigma > 0$, sont des ellipsoïdes avec les axes $e_1,\ldots,e_p$, où les e_i sont les vecteurs propres de Σ.

3. Soient X_1, X_2, X_3 iid et de loi $\mathcal{N}_p(\mu,\Sigma)$. Soient $Y_1 = X_1 + X_2$, $Y_2 = X_1 + X_3$ et $Y_3 = X_2 + X_3$. Déterminez la loi de $Y_1|Y_2$ et la loi de $Y_1|Y_2, Y_3$.

4. Montrez que $\mathrm{vec}(ABC) = (C' \otimes A)(\mathrm{vec}(B))$.

5. Montrez que $\mathrm{tr}(A \otimes B) = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$.

6. Soit $X_k = Z_k + AZ_{k-1}$ où $(Z_k)_{k\geq 0}$ sont iid et $Z_1 \sim \mathcal{N}_p(0,\Sigma)$, $A \in \mathbb{R}^{p\times p}$. Quelle est la loi de la matrice échantillon $X = (X_1',\ldots,X_n')'$?

7. Soit (X_k) un processus *stationnaire* en $\mathbb{R}^p$. C.à.d.

$$(X_1,\ldots,X_n) \stackrel{d}{=} (X_{1+h},\ldots,X_{n+h}) \quad \forall n \geq 1 \text{ et } \forall h \in \mathbb{Z}.$$

   En plus, supposons que $(X_1',\ldots,X_n')'$ suit une loi normale, et que le processus suit l'equation: $X_k = AX_{k-1} + Z_k$, avec $\mathrm{Cov}(Z_k, X_{k-h}) = 0 \ \forall h \geq 1$ et $EZ_k = 0$ et $\mathrm{Var}(Z_k) = \Sigma$. Supposons aussi que $\det(I - zA) \neq 0 \ \forall z \in \mathbb{Z}$ avec $|z| \leq 1$. Puis,

$$X_k \sim \mathcal{N}_p\Big(0, \sum_{k\geq 0} A^k\Sigma(A')^k\Big).$$

8. Soit $X = (X_1,\ldots,X_n)'$ indépendant de $Y \sim \mathcal{N}_n(0, I_n)$. (a) Trouvez l'estimateur de moins de carrés

$$B = \mathrm{argmin}_{b\in\mathbb{R}} \sum_{i=1}^n (Y_i - bX_i)^2.$$

   (b) Montrez que $A = \|X\|B$ est independante de X.

9. Si $M \sim W_p(\Sigma, m)$ et A est un p-v.a. tel que $P(A'\Sigma A \neq 0) = 1$ qui est indépendant de M, alors

$$A'MA/(A'\Sigma A) \sim \chi^2_m,$$

   et cette fraction est indépendante de A.