MATHF309 Analyse Multivariée 2014

1. Montrez que les marginales d'un vecteur aléatoire sont elles-mêmes des v.a.

2. Soit X un p-v.a. et Y un q-v.a. Vérifiez que pour $A \in \mathbb{R}^{r\times p}$ et $B \in \mathbb{R}^{s\times q}$

$$\mathrm{Cov}(AX, BY) = A\mathrm{Cov}(X, Y)B'.$$

   En particulier: $\mathrm{Var}(AX) = A\mathrm{Var}(X)A'$.

3. Soit Σ la matrice de variance-covariance de $X = (X_1, \ldots, X_p)'$. Montrez que Σ est singulière si et seulement si $\exists a \in \mathbb{R}^p \backslash \{0\}$, $c \in \mathbb{R}$ tel que $a'X = c$.

4. Montrez que $\bar{X}$ et S sont des estimateurs affine-équivariants de μ et Σ, respectivement.

5. Montrez que la fonction caractéristique φ_X d'un p-v.a. X est uniformément continue.

6. Montrez que $\varphi_X(t) \in \mathbb{R}\ \forall t \in R^p$ ssi $X \stackrel{D}{=} -X$.

7. Soit $X = (X_1, X_2)$ un 2-v.a. avec densité $f\left[\|x-\mu\|^2\right]$. Montrez que

$$P(\|X-\mu\| \geq z) = \pi \int_{z^2}^{\infty} f(r)dr, \quad z \geq 0.$$

8. Utilisez le résultat précédent pour montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}.$$

9. Soit (a) $X \sim \mathcal{N}(0, I_2)$, (b) $X \sim \mathrm{Unif}(B^2)$. Soit $Y = (R, \Theta)$ les coordonnées polaires de X. Déterminez les densités de R et Θ.

10. Determinez EY et $\mathrm{Var}(Y)$. Est-ce que R et Θ sont indépendants?

11. Est-ce que (b) donne une méthode pour engendrer une observation X de loi $\mathrm{Unif}(B^2)$ (ou bien $\mathrm{Unif}(B^p)$) qui est plus efficace que celle qu'on a vue en classe?