Exercices 3 - les solutions

4 mars 2014

Exercice 1

Pour $S \sim W_p(\Sigma, m)$ utilisez la representation $S \sim \sum_{i=1}^m X_i X_i'$ ou X_i sont $\mathcal{N}(0, \Sigma)$ iid.

Exercice 2

Utilisez la representation $S \sim \sum_{i=1}^m A X_i X_i' A'$ pour $AA' = \Sigma$.

Exercice 3

$$\bar{\mathbf{X}} = (4,6)' \text{ et } \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} /4.$$

Exercice 4

1. Avec $Y_1 = X_1 - \mu \sim \mathcal{N}_6(0, \Sigma)$ et $V\Lambda^{-1}V' = \Sigma^{-1}$ on a
   — $(V'Y_1)'\Lambda^{-1}V'Y_1$,
   — $V'Y_1 \sim \mathcal{N}(0, V'\Sigma V) = \mathcal{N}(0, \Lambda)$,
   — $Y_1'\Lambda^{-1}Y_1 \sim \chi^2(6)$.
2. Par la lemme de Fisher on a $\bar{\mathbf{X}} \sim \mathcal{N}_6(\mu, \frac{1}{20}\Sigma)$.
3. $\sqrt{n}(\bar{\mathbf{X}} - \mu) \sim \mathcal{N}_6(0, \Sigma)$.
4. Par la lemme de Fisher on a $(n-1)\mathbf{S} \sim W_6((n-1), \Sigma)$, alors $\mathbf{S} \sim W_6(19, \Sigma/19)$.

Exercice 5

Par la lemme de Fisher on a $19\mathbf{S} \sim W_6(19, \Sigma)$. On utilise la representation $\sum_{i=1}^{19} Z_i Z_i'$ où Z_i iid suivent $\mathcal{N}(0, \Sigma)$.

Exercice 6

La lemme de Fisher.

Exercice 7

Par la definition et l'algebra.

$$
\begin{aligned}
T^2(CX) &= n(C\bar{X})'(C'SC)^{-1}(C\bar{X}) \\
&= n(\bar{X})'C'CS^{-1}C'C(\bar{X}) = T^2(X).
\end{aligned}
$$

Exercice 8

Sous H_0 on a

1. $T_c^2(X) = 20(\bar{\mathbf{X}} - \mu)'\Sigma^{-1}(\bar{\mathbf{X}} - \mu) \sim \chi_p^2$,
2. $\frac{n-p}{p(n-1)}T^2(X) = \frac{20(20-3)}{3(20-1)}(\bar{\mathbf{X}} - \mu)'\mathbf{S}^{-1}(\bar{\mathbf{X}} - \mu) \sim F_{p,n-p}$.

Donc ici on a,

$$
\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}
$$

et $\bar{\mathbf{X}} - \mu_0 = -(0.1, -0.3, 0.3)'$. On obtient $T_c^2(X) = 9.2$ et $\frac{n-p}{p(n-1)}T^2(X) = 2.74$. Cependant $\chi^2_{3,0.95} = 7.814728$ et $F_{3,17,0.95} = 3.20$.

R :

```
# setup
M = cbind(c(1,0,0),c(0,2,1),c(0,1,1))
mu = c(0.1,-0.3,0.3)

# known Sigma
T = 20 * mu %*% solve(M) %*% mu
q = qchisq(0.95,3)
# Here: T < q

# unknown Sigma
T = mu %*% solve(M) %*% mu * 20 * (20 - 3)/(3*(20 - 1))
q = qf(0.95,3,17)
# Here: T > q (!)
```

Exercice 9

Définissez la distance $d_S(X) = (X - \bar{\mathbf{X}})' S^{-1} (X - \bar{\mathbf{X}})$ et comparez les points.

R :

```
# setup
C = cbind(c(3,5,7,2,4,6,5,3,4),c(3,5,6,6,3,6,4,2,4))

# definition de la distance
mu = colMeans(C)
S = var(C)
Sinv = solve(S)
dist = function(X) { t(X - mu) %*% Sinv %*% (X - mu) }

# comparation des points
apply(C,1,dist)
```

Exercice 10

Soit $M \sim W_p(\Sigma, m)$ et A est un p-v.a. tel que $P(A'\Sigma A \neq 0)$ et $M \perp\!\!\!\perp A$. Soit $A = a$. Par definition, il exists $(X_i)_{1 \leq i \leq m}$ iid $\mathcal{N}(0, I_P)$, tel que

$$M \overset{\mathcal{D}}{=} \sum_{i=1}^{m} (aBX_i)'(aBX_i)/a'\Sigma a$$

où $B'B = \Sigma$. Si on dénote $Y_i = aBX_i$ ou $Y_i \sim \mathcal{N}(0, a'\Sigma a)$ alors

$$M \overset{\mathcal{D}}{=} \sum_{i=1}^{m} Y_i^2/a'\Sigma a \overset{\mathcal{D}}{=} \sum_{i=1}^{m} Z_i^2$$

où $Z_i = Y_i/\sqrt{a'\Sigma a} \sim \mathcal{N}(0,1)$, donc $M \sim \chi^2(m)$ pour n'importe quelle valeur de A.

On a alors

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{P}[M < s, A < t] &= \int_{\mathbb{R}^p} \boldsymbol{P}[M < s, A < t | A = a] dF_A(a) \\
&= \int_{\mathbb{R}^p} \boldsymbol{P}[M < s | A = a] I_{A<t} dF_A(a) \\
&= \int_{\mathbb{R}^p} \boldsymbol{P}[M < s] I_{A<t} dF_A(a) \\
&= \int_{\mathbb{R}^p} F_M(s) I_{A<t} dF_A(a) \\
&= F_M(s) \int_{\mathbb{R}^p} I_{A<t} dF_A(a) \\
&= F_M(s) F_A(t).
\end{aligned}
$$

Alors, M et A sont indépendantes.