Exercices 2 - les solutions

27 février 2014

Exercice 1

1. Σ est une matrice définie positive alors elle est invertible et pour chaque $v \in \mathbb{R}^d, v \neq 0$ on a $v'\Sigma^{-1}v > 0$. Particulièrement, si $v = x - y$ on obtient $d^2(x,y) > 0$ et on peut alors définir $d(x,y) = \sqrt{d^2(x,y)} > 0$ et $d(x,y) = 0 \iff x = y$.
2. Par linéarité on a

$$\begin{aligned} d^2(x,y) &= (x-y)'\Sigma^{-1}(x-y) = (-(y-x))'\Sigma^{-1}(-(y-x)) \\ &= (y-x)'\Sigma^{-1}(y-x) = d^2(y,x). \end{aligned}$$

3. Finalement, pour chaque $x, y, z \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\begin{aligned} d^2(x,z) &= (x-z)'\Sigma^{-1}(x-z) \\ &= (x-y+y-z)'\Sigma^{-1}(x-y+y-z) \\ &= (x-y)'\Sigma^{-1}(x-y) + (x-y)'\Sigma^{-1}(y-z) \\ &+ (y-z)'\Sigma^{-1}(x-y) + (y-z)'\Sigma^{-1}(y-z) \\ &= d^2(x,y) + 2(x-y)'\Sigma^{-1}(y-z) + d^2(y,z) \\ &\leq d^2(x,y) + 2\|\Sigma^{-1/2}(x-y)\|\|\Sigma^{-1/2}(y-z)\| + d^2(y,z) \\ &= d^2(x,y) + 2d(x,y)d(y,z) + d^2(y,z) = (d(x,y)+d(y,z))^2 \end{aligned}$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 2

On peut déplacer la variable X linéairement, alors, sans perte de la généralité, on peut assumer que $\boldsymbol{E}X = 0$. Donc, soit $X \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ et

$$f^X(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{p/2} \frac{1}{|\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-d^2_\Sigma(x,\mu)/2\right).$$

On va démontrer que l'ensamble $\{x \in \mathbb{R}^p : f^X(x) = r\}$ est une hyper-ellipsoïde.
On a

$$\begin{aligned}
\exp\left(-d^2_\Sigma(x,\mu)/2\right) &= r(2\pi)^{p/2}|\Sigma|^{1/2}\\
-d^2_\Sigma(x,\mu)/2 &= \log(r(2\pi)^{p/2}|\Sigma|^{1/2})\\
d^2_\Sigma(x,\mu) &= R^2
\end{aligned}$$

où $R^2 = -2\log(r(2\pi)^{p/2}|\Sigma|^{1/2}) \geq 0$ si $r(2\pi)^{p/2}|\Sigma|^{1/2} \leq 1$. Maintenant,

$$C_R = \{x \in \mathbb{R}^p : x'\Sigma^{-1}x = R^2\}$$

On sait que Σ est symétrique, alors on peut le decomposer à $\Sigma^{-1} = V\Lambda^{-1}V'$ où les colonnes de V sont les vecteur propres de Σ, $V'V = I$ et $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p]$ avec $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_p > 0$ valeurs propres de Σ.
. On a alors

$$\begin{aligned}
C_R &= \{x \in \mathbb{R}^p : x'V'\Lambda^{-1}Vx = R^2\}\\
&= \{y = Vx \in \mathbb{R}^p : y'\Lambda^{-1}y = R^2\}\\
&= \{V'y = x \in \mathbb{R}^p : y'\Lambda^{-1}y = R^2\}.
\end{aligned}$$

Dans la forme avec la matrice diagonale $y'\Lambda^{-1}y = R^2$ les axes sont donnés par les vecteurs $e_1 = (1,0,0,...,0)'$, $e_2 = (0,1,0,...,0)'$, ... V est la rotation qui ne change que la direction, alors, après cette changement, les axes sont donne par $v_i = Ve_i$ - les vecteurs propres de Σ.

Exercice 3

On va utiliser la proposition du course. On a $\boldsymbol{E}Y_i = 2\mu$, $\text{Var}\, Y_i = 2\Sigma$ et $Cov(Y_1,Y_2) = \text{Var}(X_1) = \Sigma$. Alors $Y_i \sim \mathcal{N}(2\mu, 2\Sigma)$. Soit $Z' = [Y_1', Y_2', Y_3']$. On a $\boldsymbol{E}Z' = [\mu', \mu', \mu']$ et

$$Cov(Z) = \begin{bmatrix} 2\Sigma & \Sigma & \Sigma \\ \Sigma & 2\Sigma & \Sigma \\ \Sigma & \Sigma & 2\Sigma \end{bmatrix}$$

Par la proposition, on trouve

$$\begin{aligned}
(Y_1|Y_2 = y_2) &\sim \mathcal{N}\left(2\mu + \frac{1}{2}\Sigma\Sigma^{-1}(y_2 - \mu), 2\Sigma - \frac{1}{2}\Sigma\Sigma^{-1}\Sigma\right)\\
&\sim \mathcal{N}\left(\frac{1}{2}y_2 + \frac{3}{2}\mu, \frac{3}{2}\Sigma\right).
\end{aligned}$$

Pour déterminer la loi de $(Y_1|Y_2,Y_3)$ on va prendre $V' = (Y_2', Y_3')$ avec

$$M = Cov(V) = \begin{bmatrix} 2\Sigma & \Sigma \\ \Sigma & 2\Sigma \end{bmatrix} \text{ et } S = Cov(Y_1, V) = \begin{bmatrix} \Sigma & \Sigma \end{bmatrix}.$$

Donc, après la proposition, on a

$$(Y_1|V = v) \sim \mathcal{N}(2\mu + SM^{-1}(v - m), 2\Sigma - SM^{-1}S').$$

Exercice 4

Soit $A \in \mathbb{R}^{s\times r}$, $B \in \mathbb{R}^{r\times q}$, $C \in \mathbb{R}^{q\times p}$ et $\mathrm{vec}(ABC) = (p_i)_{1\leq i\leq ps}$. Soit $i = s(k-1)+l$ où $l \in \{1,...,s\}$. On a

$$\begin{aligned}
[(C' \otimes A)\,\mathrm{vec}(B)]_i &= (C'_k \otimes A)_l\,\mathrm{vec}(B) \\
&= \sum_{j=1}^{q} (C_j^k \otimes A)_l B^j \\
&= \sum_{j=1}^{q} A_l B^j C_j^k k \\
&= (AB)_l C^k = (ABC)_l^k = vec(ABC)_i,
\end{aligned}$$

où M_l dénote l-tième ligne et M^k, k-tième collonne de la matrice M.

Exercice 5

Soit $A \in \mathbb{R}^{r\times r}$ et $B \in \mathbb{R}^{s\times s}$. Par définitions

$$\mathrm{tr}(A \otimes B) = \sum_{i=1}^{k} A_i^i\,\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B).$$

Exercice 6

Les vecteurs X_k sont gaussiennes, parce qu'ils sont les sommes de vecteurs gaussiennes indépandantes. Cette loi est determiée par la moyenne et la variance. On tourve simplement la moyenne 0. Maintenant,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[X_1] &= \boldsymbol{E} Z_1' Z_1 = \Sigma, \\
\mathrm{Var}[X_k] &= \mathrm{Var}(Z_k + AZ_{k-1}) \\
&= \mathrm{Var}(Z_k) + A\,\mathrm{Var}(Z_{k-1})A = \Sigma + A\Sigma A.'
\end{aligned}$$

On doit trouver aussi la covariance de X_k et X_l pour $k \neq l$. Clairement si $|k-l| > 1$ la covariance égal à zéro. Si, $l = k+1$ on a

$$Cov[X_l, X_k] = Cov[X_2, X_1] = Cov[AZ_1, Z_1] = A\Sigma$$

On a finalement $\boldsymbol{E}X = 0$ et

$$S = Cov(X) = \begin{bmatrix}
\Sigma & \Sigma A' & 0 & 0 & \dots & 0 \\
A\Sigma & \Sigma + A\Sigma A' & \Sigma A' & 0 & \dots & 0 \\
0 & A\Sigma & \Sigma + A\Sigma A' & \Sigma A' & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & A\Sigma & \Sigma + A\Sigma A' & \Sigma A' \\
0 & 0 & 0 & 0 & A\Sigma & \Sigma + A\Sigma A'
\end{bmatrix}.$$

On doit rémarquer que X suit la loi normale parce qu'il est une fonction linéaire de $Z_1, Z_2, ..., Z_n$ indépandantes. On peut conclure que alors X suit la loi $\mathcal{N}(0, S)$.

Exercice 7

Étant donnés que X_k suit la loi normale, il nous suffit trouver $\boldsymbol{E}X, \mathrm{Var}(X_k)$.

Par la stationarité on a $EX_k = \boldsymbol{E}X_j$ et $\mathrm{Var}\, X_k = \mathrm{Var}\, X_j$ pour chaque $k, j \in \boldsymbol{N}$. Alors

$$\boldsymbol{E}X_0 = \boldsymbol{E}(AX_{-1} + Z_0) = A\boldsymbol{E}X_{-1} = A\boldsymbol{E}X_0$$

et n répétant la procedure on obtient $\boldsymbol{E}X_0 = A^n\boldsymbol{E}X_0$ pour chaque $n > 0$.

L'assumption nous donne que $\det(zA - I) \neq 0$ si $\|z\| \leq 1$, alors $\det(A - \lambda I) \neq 0$ si $\|\lambda\| \geq 1$. On peut conclure que les norms de valeur propres sont plus petits que 1. Le rayon spéctral est alors plus petit que 1 est on a $\|A\|^n \to 0$. Donc $\boldsymbol{E}X_0 = 0$.

De même,

$$\begin{aligned} S = \mathrm{Var}(X_0) &= \mathrm{Var}(AX_{-1} + Z_0) \\ &= \mathrm{Var}(AX_{-1}) + \mathrm{Var}(Z_0) \\ &= A\,\mathrm{Var}(X_{-1})A' + \Sigma. \end{aligned}$$

Mais on sait que par la stationarité $\mathrm{Var}(X_{-1}) = \mathrm{Var}(X_0)$. Alors, on peut mettre

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X_0) &= A\,\mathrm{Var}(X_{-1})A' + \Sigma \\ &= A^2\,\mathrm{Var}(X_{-2})(A^2)' + A\Sigma A' + \Sigma \\ &= A^M\,\mathrm{Var}(X_{-M})(A^M)' + \sum_{k=0}^{M-1} A^k\Sigma(A^k)' \\ &= A^M\,\mathrm{Var}(X_0)(A^M)' + \sum_{k=0}^{M-1} A^k\Sigma(A^k)'. \end{aligned}$$

Par l'assumption on sait que S est finie alors on conclue que $\mathrm{Var}(X_0) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k\Sigma(A^k)'$.

Exercice 8

(a)

$$B = \mathrm{argmin}_{b\in\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n}(Y_i - bX_i)^2$$

On va trouver les zéros de la dérivative de $f(b) = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - bX_i)^2$. On a

$$f'(b) = \left(\sum_{i=1}^{n} b^2X_i^2 - 2bY_iX_i\right)' = \sum_{i=1}^{n} 2bX_i^2 - 2Y_iX_i = 0,$$

donc

$$B = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_iX_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2} = \sum_{i=1}^{n} Y_iX_i/\|X\|^2.$$

(b) Soit $s, t_i \in \mathbb{R}$ pour $i \in \{1, 2, ..., n\}$. On a

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{P}[\|X\|B < s, \forall_{i=1}^n X_i \leq t_i] \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{P}[\|X\|\|x\| \sum_{i=1}^n Y_i x_i/\|x\|^2 < s, \forall_{i=1}^n X_i \leq t_i | X = (x_1, x_2, ..., x_n)] dF_X(x) \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{P}[\sum_{i=1}^n Y_i (x_i/\|x\|) < s, \forall_{i=1}^n x_i \leq t_i | X = (x_1, x_2, ..., x_n)] dF_X(x) \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{P}[\sum_{i=1}^n Y_i (x_i/\|x\|) < s | X = (x_1, x_2, ..., x_n)] I_{\forall_{i=1}^n x_i \leq t_i} dF_X(x).
\end{aligned}$$

Maintenant $Y_i \mathcal{N}(0,1)$ iid. Alors

$$\sum_{i=1}^n Y_i (x_i/\|x\|) \sim \mathcal{N}\left(0, \sum_{i=1}^n x_i^2/\|x\|^2\right) \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{P}[\|X\|B < s, \forall_{i=1}^n X_i \leq t_i] \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{P}[\sum_{i=1}^n Y_i (x_i/\|x\|) < s | X = (x_1, x_2, ..., x_n)] I_{\forall_{i=1}^n x_i \leq t_i} dF_X(x) \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{P}[Z < s | X = (x_1, x_2, ..., x_n)] I_{\forall_{i=1}^n x_i \leq t_i} dF_X(x) \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(s) \boldsymbol{P}[Z < s | X = (x_1, x_2, ..., x_n)] I_{\forall_{i=1}^n x_i \leq t_i} dF_X(x) \\
&\quad = \Phi(s) F_X(t),
\end{aligned}$$

qui implique l'indépendance.

Exercice 9

Soit $M \sim W_p(\Sigma, m)$ et A est un p-v.a. tel que $P(A'\Sigma A \neq 0)$ et $M \perp\!\!\!\perp A$. Soit $A = a$. Par definition, il exists $(X_i)_{1 \leq i \leq m}$ iid $\mathcal{N}(0, I_P)$, tel que

$$M \overset{\mathcal{D}}{=} \sum_{i=1}^m (aBX_i)'(aBX_i)/a'\Sigma a$$

où $B'B = \Sigma$. Si on dénote $Y_i = aBX_i$ ou $Y_i \sim \mathcal{N}(0, a'\Sigma a)$ alors

$$M \overset{\mathcal{D}}{=} \sum_{i=1}^m Y_i^2/a'\Sigma a \overset{\mathcal{D}}{=} \sum_{i=1}^m Z_i^2$$

où $Z_i = Y_i/\sqrt{a'\Sigma a} \sim \mathcal{N}(0,1)$, donc $M \sim \chi^2(m)$ pour n'importe quelle valeur de A.

On a alors

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}[M < s, A < t] &= \int_{\mathbb{R}^p} \boldsymbol{P}[M < s, A < t | A = a] dF_A(a) \\
&= \int_{\mathbb{R}^p} \boldsymbol{P}[M < s | A = a] I_{A<t} dF_A(a) \\
&= \int_{\mathbb{R}^p} \boldsymbol{P}[M < s] I_{A<t} dF_A(a) \\
&= \int_{\mathbb{R}^p} F_M(s) I_{A<t} dF_A(a) \\
&= F_M(s) \int_{\mathbb{R}^p} I_{A<t} dF_A(a) \\
&= F_M(s) F_A(t).
\end{aligned}$$

Alors, M et A sont indépendantes.